Ueber die Gauss'sche Methode

aus den

Beobachtungen dreier gleichen Sternhöhen

die

Höhe, Zeit und Polhöhe zu finden

und

praktische Hilfsmittel zu ihrer Anwendung.

INAUGURAL-DISSERTATION

der mathematisch-naturwissenschaftlichen Facultät

der

Kaiser-Wilhelms-Universität Strassburg

zur Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt von

BERTHOLD COHN

aus Rawitsch.

STRASSBURG i. E.

Josef Singer, Buchhandlung.

Buchdruckerei M. DuMont-Schauberg.

1897.

Ueber die Gauss'sche Methode

aus den

Beobachtungen dreier gleichen Sternhöhen

die

Höhe, Zeit und Polhöhe zu finden

und

praktische Hilfsmittel zu ihrer Anwendung.

INAUGURAL-DISSERTATION

der mathematisch-naturwissenschaftlichen Facultät

der

Kaiser-Wilhelms-Universität Strassburg

zur Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt von

BERTHOLD COHN

aus Rawitsch.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

STRASSBURG i. E.

Josef Singer, Buchhandlung.

Buchdruckerei M. DuMont-Schauberg.

1897.

Lebenslauf.

Am 21. Januar 1870 wurde ich zu Rawitsch (Provinz Posen) geboren als Sohn des im Jahre 1886 daselbst verstorbenen Kaufmanns Markus Cohn und seiner ebendort im Jahre 1891 verstorbenen Gattin Pauline geb. Brie. Im Herbst 1876 trat ich in die Nona der Vorschule und zu Ostern 1879 in die Sexta der damaligen königlichen Realschule I. Ordnung, jetzigen Gymnasiums, zu Rawitsch. Nachdem ich die Anstalt mit dem Zeugnis der Reife verlassen hatte, bezog ich Ostern 1890 die Universität zu Basel, um mich dem Studium der Mathematik und speziell der Astronomie zu widmen. Zu Ostern 1891 ging ich nach Breslau und zu Ostern 1892 nach Strassburg und verblieb an der hiesigen Universität bis jetzt. Während meiner Studienzeit hörte ich Vorlesungen bei den folgenden Herren Professoren und Dozenten: Becker, Christoffel, Galle (Breslau), Hagenbach (Basel), Kobold, Kohlrausch, Krazer, Reye, Riggenbach (Basel), Kinkelin (Basel), Schlesinger (Basel), Rosanes (Breslau), Weber, Windelband und Wislicenus.

Indem ich den genannten Herren für den mir erteilten Unterricht an dieser Stelle danke, muss ich noch hervorheben, dass die Herren Professoren Becker und Wislicenus sowie Herr Dr. Kobold während meines Studiums mir stets mit Rat zur Seite gestanden und an dem Zustandekommen dieser Arbeit den regsten Anteil genommen haben, wofür ich mich jeder Zeit zu ganz besonderem Danke gegen sie verpflichtet fühlen werde.

Strassburg, den 14. Juli 1896.

Berthold Cohn.

Einleitung.

Ein in unbekannten Gegenden reisender Forscher hat Untersuchungen der verschiedensten Art anzustellen. Zu den an ihn herantretenden Aufgaben gehört im allgemeinen auch eine astronomisch-geographische Aufnahme des von ihm durchwanderten Gebietes. Da der instrumentelle Apparat gewisse durch die Reise gebotene Grenzen nicht übersteigen darf, und der Reisende meist auch nicht eine grosse Übung in der Kunst des Beobachtens besitzen wird, so wird er mit Vorteil von solchen Methoden Gebrauch machen, welche auch mit kleineren Instrumenten eine hinreichende Genauigkeit zu erreichen gestatten, und deren praktische Ausführung möglichst einfach ist.

Vor allem wäre hier die Methode zu erwähnen, auf welche Zinger im Jahre 1874 durch seine Schrift „die Zeitbestimmung aus korrespondierenden Höhen verschiedener Sterne" aufmerksam gemacht hat. Wie schon O. Struve in dem Vorwort zu der genannten Arbeit bemerkt, lässt die Zingersche Methode an Genauigkeit nichts zu wünschen übrig und verdient eine weitere Verbreitung. Ganz besonders zu empfehlen ist aber die Methode von Gauss, aus den Beobachtungen von gleichen Höhen dreier Sterne die Zeit und die Polhöhe zu finden.

Zur einwurfsfreien Anwendung einer der beiden Methoden mittelst eines Universalinstruments, wie solches von dem Reisenden meist mitgeführt wird, wäre freilich erforderlich, dass dasselbe mit einem sogenannten Horrebowniveau versehen ist, welches mit dem Fernrohr oder der Fernrohrachse fest verbunden werden kann. In der Regel erlauben aber die Dimensionen des Instruments die Anbringung einer solchen Libelle nicht, allein bei sorgfältiger Handhabung dürfte auch die übliche Konstruktion ausreichen, wenn man voraussetzen darf, dass keine Schlotterungen der vertikalen Drehungsachse von merklichem Betrage eintreten, und die Höhenänderung des Fernrohrs bei der Drehung um letztere lediglich durch die Aufstellung bedingt wird; denn in diesem Fall wird die gewöhnliche Höhenlibelle ausreichen, um die etwaigen Änderungen in der Lage des Fernrohrs erkennen zu lassen.

Seit einigen Jahren wird für Reisezwecke vielfach ein Instrument benutzt, welches unter der Bezeichnung Reisetheodolith, von der Firma Max Hildebrand, früher August Lingke & Cie., in Freiberg i. S. hergestellt wird, und welches mir wegen der festen Verbindung der Höhenlibelle mit dem Lagerträger trotz seiner kleinen Dimensionen auch für die Anwendung der Gaussschen Methode recht wohl geeignet scheint; dasselbe hat auch für die folgende Arbeit die numerischen Daten geliefert.

Wenn die Gausssche Methode bisher nicht genügend von den Reisenden gewürdigt worden ist, so kann dies nur daraus erklärt werden, dass ihnen die grossen Vorzüge derselben unbekannt blieben, und dass namentlich die Vorbereitung, die ihre Anwendung erfordert, als zu beschwerlich empfunden wurde. Es erschien mir daher nicht ungeeignet, hier nochmals die Vorzüge dieser Methode, insbesondere bei Benutzung eines Instruments wie des oben erwähnten, hervorzuheben und andererseits ein Verfahren ausfindig zu machen, welches die Auffindung von drei für die Lösung der Aufgabe geeigneten Sternen für eine beliebige Zeit und für jeden Ort der Erde sehr einfach gestaltet.

Ich werde im ersten Abschnitt im Zusammenhang die analytische Seite des Gaussschen Verfahrens entwickeln und das mit demselben zu erlangende Resultat mit dem nach anderen Methoden erhaltenen vergleichen. Im zweiten Abschnitt sollen das benutzte Instrument näher beschrieben und die mit demselben ausgeführten Beobachtungen behandelt werden, und im dritten und letzten Abschnitt werden die projektivischen Hilfsmittel eingehend erläutert, und das Verfahren an einigen Beispielen klar gemacht werden.

Erster Abschnitt.

§ 1.

Unter dem Titel: „Über eine Aufgabe der sphärischen Astronomie“ veröffentlicht Gauss in Zach's Monatlicher Korrespondenz, Oktober 1808 (S. 277) einen Artikel, worin er zeigt, dass die Methode, aus den gemessenen Zenithdistanzen zweier Sterne die Polhöhe und den Stand der Uhr zu finden, sich nicht empfiehlt, weil für die notwendige genaue Höhenmessung eine Bestimmung der Teilungsfehler des Instruments erforderlich ist. Er behandelt daher das Problem, aus den beobachteten Zeiten gleicher Höhen dreier Sterne diese gemeinschaftliche Höhe und daneben Zeit und Polhöhe zu berechnen. Im Jahrgang 1809 derselben Zeitschrift (S. 85) knüpft Gauss noch einige Bemerkungen an die Lösung dieser Aufgabe und behandelt ein Beispiel. Seit dieser Zeit ist die analytische Seite der Methode vielfach untersucht worden, und es bleibt in dieser Hinsicht wohl nichts zu wünschen übrig. Delambre behandelt die Methode ausführlich in der connaissance des temps 1811 und 1812, Oriani liefert im Anhange der effemeridi astronomiche di Milano 1810 eine fast wörtliche Übersetzung der Gauss'schen Abhandlung und fügt einige Erläuterungen bei. Die Lehrbücher von Brünnow, Chauvenet, Sawitsch, Wislicenus u. a. behandeln die Aufgabe mehr oder weniger ausführlich, und Knorre erweitert das Problem für mehr als drei Sterne. Zu erwähnen ist noch, dass Zinger in § 2 seiner Schrift daran erinnert, dass der schwedische Astronom Tammelander*) in seinem Werke „dissertatio astronomica methodum sistens inveniendi tempus verum ex observatis aequalibus diversarum stellarum altitudinibus. Aboe 1785–87“ dieselbe Aufgabe zum ersten Male löst.

*) Anm.: Herr Staatsrat Lindemann in Pulkowa hatte die Freundlichkeit, mich darauf aufmerksam zu machen, dass in den astronomischen lexicis die oben erwähnte Schrift fälschlich als von Lindquist verfasst angegeben wird; übrigens war mir die Arbeit selbst nicht zugänglich.

Vom theoretischen Standpunkte aus müsste aus der Beobachtung des Durchgangs dreier Sterne durch denselben Vertikal ebenfalls Zeit, Polhöhe und das Azimuth folgen. Doch dürfte eine derartige Methode sich nicht empfehlen, da bei den gewöhnlichen Instrumenten, zumal auf Reisen, für die Dauer der Beobachtungen nicht verbürgt werden kann, dass das Fernrohr auch wirklich einen Vertikalkreis beschreibt.

§ 2.

Die Berechnung stellt sich nach Gauss folgendermassen: Die Bezeichnungen mögen die üblichen sein, es mögen also bedeuten

$\delta' \delta'' \delta'''$ die scheinbaren Deklinationen der drei Sterne,

$\alpha' \alpha'' \alpha'''$ ihre scheinbaren Rektascensionen,

$u' u'' u'''$ die Zeiten der drei Beobachtungen nach einem Sternzeitchronometer,

Δu die Uhrkorrektion, welche für die Zwischenzeiten der Beobachtungen als konstant angenommen wird,

φ die Polhöhe des Ortes,

h die gemeinsame Höhe.

Die Stundenwinkel der drei Sterne im Augenblick der Beobachtung werden sein

$t' + \Delta u$, $t'' + \Delta u$, $t''' + \Delta u$, wenn

$t' = u' - \alpha'$, $t'' = u'' - \alpha''$, $t''' = u''' - \alpha'''$.

Es lauten somit die drei Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \begin{aligned} \sin h &= \sin\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta' \cos(t' + \Delta u) \\ &= \sin\varphi \sin\delta'' + \cos\varphi \cos\delta'' \cos(t'' + \Delta u) \\ &= \sin\varphi \sin\delta''' + \cos\varphi \cos\delta''' \cos(t''' + \Delta u). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\delta' = \frac{1}{2}(\delta' + \delta'') + \frac{1}{2}(\delta' - \delta'')$$

$$\delta'' = \frac{1}{2}(\delta' + \delta'') - \frac{1}{2}(\delta' - \delta'')$$

und subtrahieren die zweite von der ersten Gleichung, so dass wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \sin\varphi \sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta'') \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta'') \\ &+ \cos\varphi \cos(t' + \Delta u)\left[\cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta'') \cos\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta'') - \sin\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta'') \sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta'')\right] \\ &- \cos\varphi \cos(t'' + \Delta u)\left[\cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta'') \cos\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta'') + \sin\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta'') \sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta'')\right] \\ 0 &= \sin\varphi \sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta'') \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta'') \\ &+ \cos\varphi \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta'') \cos\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta'') \sin\tfrac{1}{2}(t'' - t') \sin\left(\frac{t' + t''}{2} + \Delta u\right) \\ &- \cos\varphi \sin\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta'') \sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta'') \cos\tfrac{1}{2}(t'' - t') \cos\left(\frac{t' + t''}{2} + \Delta u\right) \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\sin\frac{1}{2}(t''-t')\sin\left(\frac{t''+t'}{2}+\Delta u\right)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\delta'-\delta'')$$
$$+\cos\frac{1}{2}(t''-t')\cos\left(\frac{t'+t''}{2}+\Delta u\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta'+\delta'')$$

Man bestimme A' und B' so, dass

$$A'\sin B' = \sin\frac{1}{2}(t''-t')\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\delta'-\delta'')$$
$$A'\cos B' = \cos\frac{1}{2}(t''-t')\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta'+\delta'')$$

und setze

$$C' = \frac{t''-t'}{2} + B',$$

wodurch obige Gleichung die Form erhält

$$\operatorname{tg}\varphi = A'\cos(C'+t'+\Delta u)$$

Die Subtraktion der dritten des Gleichungssystems I von der ersten liefert den obigen analoge Formeln, und wenn man wiederum setzt

$$A''\sin B'' = \sin\frac{1}{2}(t'''-t')\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\delta'-\delta''')$$
$$A''\cos B'' = \cos\frac{1}{2}(t'''-t')\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta'+\delta''')$$
$$C'' = \frac{1}{2}(t'''-t') + B'',$$

so findet man

$$\operatorname{tg}\varphi = A''\cos(C''+t'+\Delta u)$$

Durch Verbindung dieser mit der entsprechenden obigen Gleichung erhält man

$$\frac{A'}{A''} = \frac{\cos(C''+t'+\Delta u)}{\cos(C'+t'+\Delta u)}$$
$$\frac{A''-A'}{A''+A'} = \frac{\cos(C'+t'+\Delta u)-\cos(C''+t'+\Delta u)}{\cos(C'+t'+\Delta u)+\cos(C''+t'+\Delta u)}$$
$$= \frac{2\sin\left[\frac{1}{2}(C'+C'')+t'+\Delta u\right]\sin\frac{1}{2}(C''-C')}{2\cos\left[\frac{1}{2}(C'+C'')+t'+\Delta u\right]\cos\frac{1}{2}(C''-C')}$$

Wenn man einen Winkel ζ so bestimmt, dass

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{A'}{A''}$$

$$\text{also } \frac{A''-A'}{A''+A'} = \operatorname{tg}(45-\zeta) \text{ ist,}$$

und man setzt

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}(45-\zeta)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(C''-C'),$$

so wird

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(C'+C'')+t'+\Delta u\right]$$

$$\psi = \frac{1}{2}(C' + C'') + t' + \Delta u$$

$$\Delta u = -\frac{1}{2}(C' + C'') - t' + \psi.$$

An einem Beispiel wollen wir zeigen, wie sich die Rechnung nach obigen Formeln stellen würde.

Als Uhrangaben lege ich die Zahlen zugrunde, die an dem nachher zu beschreibenden Instrumente erhalten worden sind, nachdem die den drei Fäden entsprechenden Beobachtungszeiten wegen Niveaustand verbessert und auf den Mittelfaden (nur mit Berücksichtigung der Glieder erster Ordnung) reduziert worden waren.

1895 Juni 25. Strassburg: Pfeiler des fahrbaren Häuschens im Garten der Sternwarte. Chronometer: Kessels.

	u			α			δ		
α lyrae	15h	26m	0s.5	18h	33m	25s.8	38°	41′	3″
γ urs. maj.		34m	9s.9	11	48	20.8	54°	16′	49″
α bootis		46m	42s.0	14	10	54.7	19°	43′	37″
u″ — u′	+	8m	9s.4	u‴ — u′			+	20m	41s.5
α″ — α′	—6h	45m	5s.0	α‴ — α′			—4h	22m	31″.1
t″ — t′	6h	53m	14s.4	t‴ — t′			4h	43m	12s.6
δ′ — δ″	—15°	35′	46″	δ′ — δ‴			+18°	57′	26″
$\frac{1}{2}(t'' - t')$	3h	26m	37s.2	$\frac{1}{2}(t''' - t')$			2h	21m	36s.3
„ °	51°	39′	18″.0	„ °			35°	24′	4″.5
$\frac{1}{2}(\delta' - \delta'')$	—7°	47′	53″	$\frac{1}{2}(\delta' - \delta''')$			+9°	28′	43″
$\frac{1}{2}(\delta' + \delta'')$	46°	28′	56″	$\frac{1}{2}(\delta' + \delta''')$			29°	12′	20″
$\cot g \frac{1}{2}(\delta' - \delta'')$	0.	863	443 n	$\cot g \frac{1}{2}(\delta' - \delta''')$			0.	777	390
$\sin \frac{1}{2}(t'' - t')$	9.	894	477	$\sin \frac{1}{2}(t''' - t')$			9.	762	903
$\cos \frac{1}{2}(t'' - t')$	9.	792	668	$\cos \frac{1}{2}(t''' - t')$			9.	911	219
$tg \frac{1}{2}(\delta' + \delta'')$	0.	022	480	$tg \frac{1}{2}(\delta' + \delta''')$			9.	747	418
A′ sin B′	0.	757	920 n	A″ sin B″			0.	540	293
A′ cos B′	9.	815	148	A″ cos B″			9.	658	637
sin B′	9.	997	192 n	sin B″			9.	996	287
B′	276°	30′	30″.4	B″			82°	31′	6″.6
C′	328°	9′	48″.6	C″			117°	55′	11″.1
C′ + t′ + Δu	281°	20′	32″.6	C″ + t′ + Δu			71°	5′	55″.1

$\cos C' + t' + \Delta u$	9.293 741	$C'' - C'$	$-210^\circ\ 14'\ 37''.5$
$\lg A'$	0.760 728	$C'' + C'$	$86^\circ\ 4'\ 59''.7$
$\lg A''$	0.544 006	$\frac{1}{2}(C'' - C')$	$-105^\circ\ 7'\ 18''.8$
$\cos C'' + t' + \Delta u$	9.510 464	$\frac{1}{2}(C'' + C')$	$43^\circ\ 2'\ 29''.9$
ζ	$58^\circ\ 44'\ 13''.3$	ψ	$-3^\circ\ 46'\ 46''.1$
$\operatorname{tg} 45 - \zeta$	9.388 205 n	$(\Delta u' + t')$ h	$-46\ 49'\ 16''.0$
$\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(C'' - C')$	9.431 734	$(\Delta u + t')$	$-3\ 7'\ 17''.1$
		t'	$-3\ 7\ 25''.3$
$\operatorname{tg} \varphi$	0.054 469		
φ	$48^\circ\ 35'\ 1''.0$	Δu	$+ 8^s.2$

Berechnung der Höhe.

$\cos \varphi$	9. 820 551	$\sin \varphi$	9. 875 013
$\cos \delta$	9. 892 430	$\sin \delta$	9. 795 899
$\cos \varphi \cos \delta$	9. 712 981		
$\cos t$	9. 835 233		
$\cos \varphi \cos \delta \cos t$	9. 548 214		
$\sin \varphi \sin \delta$	9. 670 912		
G. L.	0. 244 000		
$\cos z$	9. 914 912		
z	$34^\circ\ 42'\ 25''.0$		

§ 3.

Die hier gegebene Lösung wird sich für die Praxis am meisten empfehlen. Sie verlangt 24, und wenn man bloss Zeit und Breite wünscht, 18 Logarithmen, die zum Teil Funktionen desselben Winkels sind. Cagnoli giebt in seiner trigonometria piana e sferica eine andere Lösung derselben Aufgabe, zwar nicht direkt, aber doch so, dass sie auf unser Problem übertragen werden kann, und wir verweisen hierüber auf die Bemerkung von Gauss. Da die Berechnung nach den Cagnolischen Formeln auch weitläufiger wird, als die von Gauss angegebene, so wollen wir die erstere hier übergehen. Ziemlich einfach aber ist die Entwicklung von Delambre. Dieser setzt, wenn hier $t'\ t''\ t'''$ die wahren Stundenwinkel bezeichnen, und λ' und λ'' durch die Gleichungen definiert sind

$$\lambda' = (u'' - \alpha'') - (u' - \alpha')$$
$$\lambda'' = (u''' - \alpha''') - (u' - \alpha')$$

die ursprünglichen Gleichungen wie folgt an

II.
$$\frac{\sin h}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi \sin \delta' + \cos \delta' \cos t'$$
$$= \operatorname{tg} \varphi \sin \delta'' + \cos \delta'' \cos (t' + \lambda')$$
$$= \operatorname{tg} \varphi \sin \delta''' + \cos \delta''' \cos (t' + \lambda'')$$

Durch Substitution von

$$t' = t' + \frac{\lambda'}{2} - \frac{\lambda'}{2}$$

in die erste Gleichung und von

$$t' + \lambda' = t' + \frac{\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{2}$$

in die zweite und Subtraktion der ersteren von der letzteren erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{tg}\varphi\,(\sin\delta'' - \sin\delta') \\ &+ (\cos\delta'' - \cos\delta')\cos\frac{\lambda'}{2}\cos\left(t' + \frac{\lambda'}{2}\right) \\ &- (\cos\delta'' + \cos\delta')\sin\frac{\lambda'}{2}\sin\left(t' + \frac{\lambda'}{2}\right) \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{\cos\delta' - \cos\delta''}{\sin\delta'' - \sin\delta'}\cos\frac{\lambda'}{2}\cos\left(t' + \frac{\lambda'}{2}\right) \\ &+ \frac{\cos\delta' + \cos\delta''}{\sin\delta'' - \sin\delta'}\sin\frac{\lambda'}{2}\sin\left(t' + \frac{\lambda'}{2}\right) \\ &= \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta' + \delta'')\cos\frac{\lambda'}{2}\cos\left(t' + \frac{\lambda'}{2}\right) \\ &+ \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\delta'' - \delta')\sin\frac{\lambda'}{2}\sin\left(t' + \frac{\lambda'}{2}\right) \\ &= \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta' + \delta''\cos\frac{\lambda'}{2}}{\cos B'}\cos\left(t' + \frac{\lambda'}{2} - B'\right) \end{aligned}$$

wenn

$$\operatorname{tg} B' = \operatorname{tg}\frac{\lambda'}{2}\,\frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\delta'' - \delta')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta'' + \delta')}.$$

Setzt man ausserdem

$$C' = \frac{\lambda'}{2} - B'$$

so wird

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta'' + \delta')}{\cos B'}\cos\frac{\lambda'}{2}\cos(t' + C')$$

Auf ähnliche Weise gelangt man zu folgenden Gleichungen, wenn man die erste des Systems II von der dritten subtrahiert.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta''' + \delta')}{\cos B''}\cos\frac{\lambda''}{2}\cos(t' + C'')$$

wo

$$\operatorname{tg} B'' = \operatorname{tg}\frac{\lambda''}{2}\,\frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\delta''' - \delta')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta''' + \delta')}$$

$$C'' = \frac{\lambda''}{2} - B''$$

Aus der Identität der beiden Gleichungen für tg φ folgt

$$\frac{\cos(t' + C'')}{\cos(t' + C')} = \frac{\cos\frac{\lambda'}{2}}{\cos\frac{\lambda''}{2}} \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta'' + \delta')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta''' + \delta')} \frac{\cos B''}{\cos B'}$$

Für die rechte Seite kann man den im vorigen Paragraphen eingeführten Wert tg ζ setzen, während die linke Seite sich etwas umformen lässt, wenn man für φ'' und φ' schreibt

$$C'' = \frac{C'' + C'}{2} + \frac{C'' - C'}{2}$$

$$C' = \frac{C'' + C'}{2} + \frac{C'' - C'}{2}$$

Wir erhalten

$$\operatorname{tg}\zeta \quad \frac{1 - \operatorname{tg}\left(t' + \frac{1}{2}(C'' + C')\right) \operatorname{tg}\frac{1}{2}(C'' - C')}{1 + \operatorname{tg}\left(t' + \frac{1}{2}(C'' + C')\right) \operatorname{tg}\frac{1}{2}(C'' - C')}$$

$$\operatorname{tg}(45 - \zeta) = \operatorname{tg}\left(t' + \frac{1}{2}(C'' + C')\right) \operatorname{tg}\frac{1}{2}(C'' - C')$$

und damit

$$\operatorname{tg}\left(t' + \frac{1}{2}(C'' + C')\right) = \operatorname{tg}(45 - \zeta) \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(C'' - C')$$

$$\Delta u = t' + \alpha' - u'.$$

Hierin bedeutet $t' + \alpha' = \Theta'$ die wahre Sternzeit im Augenblick der ersten Beobachtung. Hat die benutzte Uhr einen bedeutenden Gang, so wird man das zweite und dritte Zeitmoment um die Quantitäten korrigieren müssen $\frac{u'' - u'}{24}\gamma$ bezw. $\frac{u''' - u'}{24}\gamma$, wo γ den täglichen Gang der Uhr bezeichnet und die aus der Reduktion hervorgehende Uhrkorrektion nunmehr für die Zeit u' gelten wird. Wenn die benutzte Uhr mittlere Zeit angiebt, so sind die Zwischenzeiten $u'' - u'$ und $u''' - u'$ erst in Sternzeit zu verwandeln durch Multiplikation mit dem Faktor $1 + \frac{1}{365.24}$ oder mittelst einer entsprechenden Tafel, bevor sie nach obigen Formeln für die Reduktion verwendet werden.

§ 4.

Wir gehen nun zur Entwickelung der Differentialformeln über, um zu sehen, von welchem Einfluss etwaige Beobachtungsfehler auf das Resultat sind. Differenziert man die drei Grundgleichungen I des § 2 und bezeichnet mit a das Azimuth, so erhält man

III.
$$\begin{aligned} d\,h &= -\cos a'\, d\,\varphi - \cos\varphi \sin a' (d\,u' + d\,\Delta u) \\ &= -\cos a''\, d\,\varphi - \cos\varphi \sin a'' (d\,u'' + d\,\Delta u) \\ &= -\cos a'''\, d\,\varphi - \cos\varphi \sin a''' (d\,u''' + d\,\Delta u). \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten und von der dritten entstehen die folgenden Gleichungen

$$0 = 2 \sin \frac{a' + a''}{2} \, d\varphi - 2 \cos \frac{a' + a''}{2} \cos \varphi \, d\Delta u$$
$$- \frac{\cos \varphi \sin a'}{\sin \frac{a' - a''}{2}} \, du' + \frac{\cos \varphi \sin a''}{\sin \frac{a' - a''}{2}} \, du''$$

$$0 = 2 \sin \frac{a' + a'''}{2} \, d\varphi - 2 \cos \frac{a' + a'''}{2} \cos \varphi \, d\Delta u$$
$$- \frac{\cos \varphi \sin a'}{\sin \frac{a' - a'''}{2}} \, du' + \frac{\cos \varphi \sin a'''}{\sin \frac{a' - a'''}{2}} \, du'''$$

Die Elimination einerseits von $d\Delta u$, andererseits von $d\varphi$ ergiebt

$$d\varphi = \frac{\cos \varphi \sin a' \cos \frac{a'' + a'''}{2} \sin \frac{a'' - a'''}{2}}{2 \sin \frac{a' - a''}{2} \sin \frac{a'' - a'''}{2} \sin \frac{a' - a'''}{2}} \, du'$$
$$+ \frac{\cos \varphi \sin a'' \cos \frac{a''' + a'}{2} \sin \frac{a''' - a'}{2}}{2 \sin \frac{a' - a''}{2} \sin \frac{a'' - a'''}{2} \sin \frac{a' - a'''}{2}} \, du''$$
$$+ \frac{\cos \varphi \sin a''' \cos \frac{a' + a''}{2} \sin \frac{a' - a''}{2}}{2 \sin \frac{a' - a''}{2} \sin \frac{a'' - a'''}{2} \sin \frac{a' - a'''}{2}} \, du'''$$

$$d\Delta u = \frac{\sin a' \sin \frac{a'' + a'''}{2} \sin \frac{a'' - a'''}{2}}{2 \sin \frac{a' - a''}{2} \sin \frac{a'' - a'''}{2} \sin \frac{a' - a'''}{2}} \, du'$$
$$+ \frac{\sin a'' \sin \frac{a''' + a'}{2} \sin \frac{a''' - a'}{2}}{2 \sin \frac{a' - a''}{2} \sin \frac{a'' - a'''}{2} \sin \frac{a' - a'''}{2}} \, du''$$
$$+ \frac{\sin a''' \sin \frac{a' + a''}{2} \sin \frac{a' - a''}{2}}{2 \sin \frac{a' - a''}{2} \sin \frac{a'' - a'''}{2} \sin \frac{a' - a'''}{2}} \, du'''.$$

Setzen wir

$$\frac{a' - a''}{2} = d \qquad \frac{a'' - a'''}{2} = d' \qquad \frac{a' - a'''}{2} = d + d',$$

so lautet der Nenner

$$N = 2 \sin d \sin d' (\sin d' \cos d + \cos d' \sin d)$$
$$= \sin 2 d \sin^2 d' + \sin 2 d' \sin^2 d$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ \sin 2 d + \sin 2 d' - \sin 2 (d' + d) \right\}$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ \sin (a' - a'') + \sin (a'' - a''') + \sin (a''' - a') \right\}$$

Im vorhergehenden wurde angenommen, dass dh für alle drei Sterne gleich wäre, da man etwaige Fehler in der Höhe auf die Zeit werfen kann. Man sieht dies auch leicht ein, wenn man z. B. in der zweiten der Gleichungen III setzt $dh + d\varepsilon$, in der dritten $dh + d\varepsilon'$. Die Ausdrücke von $d\varphi$ und $d\Delta u$ werden dann je noch das folgende Glied erhalten

in $d\varphi$:

$$\frac{d\varepsilon \cos\frac{a' + a'''}{2} \sin\frac{a''' - a'}{2} - d\varepsilon' \sin\frac{a'' - a'}{2} \cos\frac{a'' + a'}{2}}{N}$$

in $d\Delta u$:

$$\frac{d\varepsilon \sin\frac{a' + a'''}{2} \sin\frac{a''' - a'}{2} - d\varepsilon' \sin\frac{a' + a''}{2} \sin\frac{a'' - a'}{2}}{N}$$

Wenn man hierin einführt

$$d\varepsilon = du'' \cos\varphi \sin a''$$
$$d\varepsilon' = du''' \cos\varphi \sin a'''$$

so kommt man zu Ausdrücken, die mit den früheren gleich gebildet sind und sich daher mit ihnen vereinigen lassen.

In der Differentialformel für $d\varphi$ lassen sich für du', du'', du''' auch die Fehler der beobachteten Zwischenzeiten einführen. Es mögen bedeuten

$$d\chi' = du'' - du'$$
$$d\chi'' = du''' - du'$$
$$d\chi'' - d\chi' = du''' - du''.$$

Durch Addition der drei Gleichungen III nach vorheriger Multiplikation derselben mit

1) $+ \sin a''$	1) $- \sin a'''$	2) $+ \sin a'''$
2) $- \sin a'$	3) $+ \sin a'$	3) $- \sin a''$

wird $d\Delta u$ eliminiert. Man erhält

$$(\sin a'' - \sin a')\, dh = \sin(a' - a'')\, d\varphi + \cos\varphi \sin a' \sin a''\, d\chi'$$
$$(\sin a' - \sin a''')\, dh = \sin(a''' - a')\, d\varphi - \cos\varphi \sin a' \sin a'''\, d\chi''$$
$$(\sin a''' - \sin a'')\, dh = \sin(a'' - a''')\, d\varphi + \cos\varphi \sin a'' \sin a'''\, d\chi'' - \cos\varphi \sin a'' \sin a'''\, d\chi'$$
$$\left[\sin(a' - a'') + \sin(a''' - a') + \sin(a'' - a''')\right] d\varphi =$$
$$= \cos\varphi \sin a''(\sin a''' - \sin a')\, d\chi' + \cos\varphi \sin a'''(\sin a' - \sin a'')\, d\chi''$$
$$d\varphi = \frac{\cos\varphi \sin a''(\sin a''' - \sin a')}{2N} d\chi'$$
$$+ \frac{\cos\varphi \sin a'''(\sin a' - \sin a'')}{2N} d\chi''$$

Die Uhrkorrektion $d\Delta u$ lässt sich nicht explicite durch die Zwischenzeiten ausdrücken, da diese sie nicht enthalten.

Es kommt nun darauf an, aus den soeben entwickelten Differentialformeln die günstigsten Bedingungen für die Anwendung der Methode herzuleiten und den Einfluss der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf das Resultat zu prüfen. Die beiden Formeln lauteten:

$$d\,\Delta u = \frac{\sin a'}{2N}(\cos a''' - \cos a'')\,d\,u' + \frac{\sin a''}{2N}(\cos a' - \cos a''')\,d\,u'' + \frac{\sin a'''}{2N}(\cos a'' - \cos a')\,d\,u'''$$

$$d\,\varphi = \frac{\cos\varphi \sin a'}{2N}(\sin a'' - \sin a''')\,d\,u' + \frac{\cos\varphi \sin a''}{2N}(\sin a''' - \sin a')\,d\,u'' + \frac{\cos\varphi \sin a'''}{2N}(\sin a' - \sin a'')\,d\,u'''.$$

Ersetzen wir hierin $d\,u$ durch $d\,h$ nach der Gleichung

$$d\,u = \frac{-\,d\,h}{\cos\varphi \sin a'},$$

dann gelangen wir zu folgenden Ausdrücken:

$$d\,\Delta u = -\left[\frac{\cos a''' - \cos a''}{2N\cos\varphi}\,d\,h' + \frac{\cos a' - \cos a'''}{2N\cos\varphi}\,d\,h'' + \frac{\cos a'' - \cos a'}{2N\cos\varphi}\,d\,h'''\right]$$

$$d\,\varphi = -\left[\frac{\sin a'' - \sin a'''}{2N}\,d\,h' + \frac{\sin a''' - \sin a'}{2N}\,d\,h'' + \frac{\sin a' - \sin a''}{2N}\,d\,h'''\right].$$

Wenn man bei allen drei Beobachtungen um dieselbe Anzahl Sekunden geirrt hat, so dass $d\,u' = d\,u'' = d\,u'''$ ist, dann wird der Fehler der resultierenden Uhrkorrektion gleich diesem Beobachtungsfehler sein, wogegen die Polhöhe, wie sie aus dem Resultat folgt, hierdurch nicht beeinflusst wird. Denn es ist unter dieser Annahme die Summe der Koeffizienten von $d\,u$ im Zähler

$$\begin{aligned} S &= \sin a' \cos a''' - \sin a' \cos a'' + \sin a'' \cos a' \\ &\quad - \sin a'' \cos a''' + \sin a''' \cos a'' - \sin a''' \cos a' \\ &= \sin(a' - a''') + \sin(a'' - a') + \sin(a''' - a'') = -2N \end{aligned}$$

also $d\,\Delta u = -d\,u$,

während die Summe der Koeffizienten von $d\,\varphi$ im Zähler

$$\begin{aligned} S_\varphi &= \sin a' \sin a'' - \sin a' \sin a''' + \sin a'' \sin a''' \\ &\quad - \sin a'' \sin a' + \sin a''' \sin a' - \sin a'' \sin a''' = 0 \end{aligned}$$

also $d\,\varphi = 0$ ist.

Machen wir $d\,h' = d\,h'' = d\,h'''$, d. h. sind die drei Sternhöhen nm denselben Betrag falsch beobachtet, so wird hierdurch weder die berechnete Uhrkorrektion noch die Polhöhe beeinflusst, wie dies unmittelbar klar ist und auch aus der obigen Gleichung folgt.

Im allgemeinen werden $d\,u$ und $d\,h$ für die drei Sterne verschieden sein, und dann wird man darauf zu sehen haben, die Koeffizienten der $d\,u$ möglichst klein zu machen, was man am einfachsten dadurch erreicht, dass man den Nenner N absolut möglichst gross werden lässt.

Setzen wir, wie oben

$$2N = \sin 2d + \sin 2d' - \sin 2(d' + d)$$

und differenzieren nach d und d′, so erhalten wir

$$\cos 2\,d - \cos 2\,(d' + d) = o$$
$$\cos 2\,d' - \cos 2\,(d' + d) = o$$

und daraus

$$2\,d = 2\,\pi\,n + (2\,d + 2\,d')$$
$$2\,d' = 2\,\pi\,n \pm (2\,d + 2\,d').$$

Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn

$$d = d' = -(d + d') = o$$

und

$$d = d' = -(d + d') = 60^0 \text{ ist.}$$

Die ersteren hier nicht weiter in Frage kommenden Werte geben das Minimum, während die zweiten das absolute Maximum darstellen.

In dem am Schlusse des § 3 angeführten Beispiel würde die Berechnung der Differentialformeln zu folgenden Gleichungen führen, deren Richtigkeit durch die Koeffizientensumme in $d\,\Delta u = -1$ und in $d\,\varphi = o$ kontroliert wird:

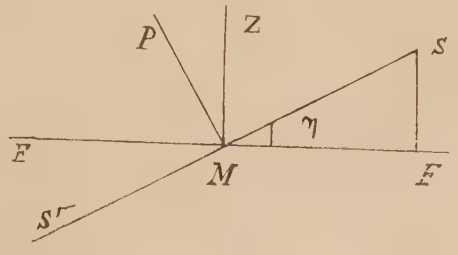
$$d\,\Delta u = -0.5635\,d\,u' - 0.2739\,d\,u'' - 0.1634\,d\,u'''$$
$$d\,\varphi = -0.0536\,d\,u' + 0.4221\,d\,u'' - 0.3676\,d\,u'''.$$

§ 5.

Mit Hilfe der Differentialformeln wollen wir nun bestimmen, in welchem Grade die Fehler der in die Rechnung eingehenden Grössen das Resultat beeinflussen. Was die Rektascension und die Deklination betrifft, so kann man dieselben mit Rücksicht auf den Zweck der Methode für die in Betracht kommenden Sterne als fehlerfrei ansehen. Die Genauigkeit des Resultats wird also allein von der Zuverlässigkeit der einzelnen Beobachtungsmomente abhängen.

Die Fehler in der Auffassung der Zeit beim Durchgang eines Sternes durch einen Faden haben zweierlei Ursache. Sie sind erstens eine Folge der Unsicherheit in der Auffassung der Uhrschläge durch das Gehör und zweitens entspringen sie unserem mangelhaften Sehvermögen, indem wir zwei Punkte dann nicht mehr von einander unterscheiden können, wenn ihre Entfernung sich einer gewissen Grenze genähert hat. Jener heisst der Gehörfehler und ist von der Bewegung des Sternes unabhängig, dieser wird der Gesichtsfehler genannt und ist eine Funktion der Richtung und der Geschwindigkeit der Bewegung der Sternes.

In der folgenden Figur möge E F einen horizontalen Faden darstellen und M den Schnittpunkt des vom Stern beschriebenen Weges mit dem Faden.



Die Normalen in M zu E F und S S' sind nach dem Zenith resp. dem Himmelspole gerichtet, so dass

$$P M Z = S M F = \eta$$

gleich dem parallaktischen Winkel ist.

Der in einer Sternzeitsekunde beschriebene Weg ausgedrückt in Bogensekunden sei

$$S M = 15'' \cos \delta$$

Dann wird also

$$\begin{aligned} S F &= 15'' \cos \delta \sin \eta, \\ &= 15 \cos \varphi \sin a, \end{aligned}$$

wo a das Azimuth bezeichnet.

Offenbar wird nun der Gesichtsfehler zu der Vergrösserung des Fernrohrs und der auf dem Faden senkrechten Komponente der Bewegung des Sternes in umgekehrtem Verhältnis stehen, und man kann daher für ihn den Ausdruck wählen

$$\frac{b}{v \cos \delta \sin \eta} = \frac{b}{v \cos \varphi \sin a},$$

wenn b eine Konstante und v die Vergrösserung bezeichnet.

Nach dem Fehlergesetz ist aber, wenn a den Gehör- und s die Gesamtwirkung beider Fehler bezeichnet

$$s = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{v^2 (\cos \varphi \sin a)^2}}$$

Für die von Albrecht aus einer grösseren Anzahl von Beobachtungen abgeleiteten wahrscheinlichsten Werte

$$a = 0.^{s}07$$

$$b = 3.^{s}18$$

kann man unter Voraussetzung von $v = 10$ (soviel betrug die Vergrösserung des Fernrohrs an dem von mir benutzten kleinen Reise-Instrument) die Grösse von s aus folgender Tabelle ersehen:

a \ φ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
10°	1.83	1.85	1.95	2.15	2.39	2.84	3.66	5.35
20°	0.93	0.94	0.99	1.07	1.21	1.44	1.86	2.71
30°	0.64	0.65	0.68	0.73	0.83	0.99	1.27	1.86
40°	0.49	0.50	0.53	0.57	0.65	0.77	0.99	1.44
50°	0.41	0.42	0.44	0.48	0.54	0.65	0.83	1.21
60°	0.37	0.37	0.39	0.42	0.48	0.57	0.73	1.07
70°	0.34	0.34	0.36	0.39	0.44	0.53	0.68	0.99
80°	0.32	0.32	0.34	0.37	0.42	0.50	0.65	0.94
90°	0.31	0.32	0.34	0.37	0.41	0.49	0.64	0.93

Jede der drei Beobachtungen wird mit einem solchen Fehler s behaftet sein, so dass das Quadrat des resultierenden wahrscheinlichen Gesamtfehlers $d\,\Delta u$ des § 4 die Form annehmen wird

$$\left[r\,(\Delta u)\right]^2 = U_1^2\,s_1^2 + U_2^2\,s_2^2 + U_3^2\,s_3^2$$

wo U die Koefficienten der $d\,u$ bedeuten.

Unter der Annahme, dass

$$a' - a'' = a'' - a''' = a''' - a' = 120^0 \text{ ist,}$$

folgt

$$\cos a''' - \cos a'' = \sqrt{3}\sin a'$$
$$\cos a' - \cos a''' = \sqrt{3}\sin a''$$
$$\cos a'' - \cos a' = \sqrt{3}\sin a'''$$

ferner

$$\sin a'' - \sin a''' = \sqrt{3}\cos a'$$
$$\sin a''' - \sin a' = \sqrt{3}\cos a''$$
$$\sin a' - \sin a'' = \sqrt{3}\cos a'''$$

sowie

$$\sin(a' - a'') + \sin(a'' - a''') + \sin(a''' - a') = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Wir erhalten somit

$$r^2(\Delta u) = \frac{4}{27}\left[3\sin^4 a'\,s_1^2 + 3\sin^4 a''\,s_2^2 + 3\sin^4 a'''\,s_3^2\right]$$
$$= \frac{4}{9}a^2\left[\sin^4 a' + \sin^4 a'' + \sin^4 a'''\right]$$
$$+ \frac{4}{9\cos^2\varphi}\,\frac{b^2}{v^2}\left[\sin^2 a' + \sin^2 a'' + \sin^2 a'''\right]$$

und

$$r^2(\varphi) = \frac{4}{9}\cos^2\varphi\left[\sin^2 a'\cos^2 a'\,s_1^2 + \sin^2 a''\cos^2 a''\,s_2^2 + \sin^2 a'''\cos^2 a'''\,s_3^2\right]$$
$$= \frac{4}{9}\cos^2\varphi\,a^2\left[\sin^2 a'\cos^2 a' + \sin^2 a''\cos^2 a'' + \sin^2 a'''\cos^2 a'''\right]$$
$$+ \frac{4}{9}\,\frac{b^2}{v^2}\left[\cos^2 a' + \cos^2 a'' + \cos^2 a'''\right].$$

Die Summen in den eckigen Klammern sind unter Beibehaltung der oben gemachten Voraussetzung über die Differenz der Azimuthe von den Werten a', a'', a''' unabhängig.

Es ergiebt sich also der Schluss, dass es gleichbedeutend ist, in welchem Azimuthe die drei Sterne sich befinden, wofern ihre Vertikalkreise am Zenith Winkel von 120^0 mit einander bilden.

Weiterhin ersehen wir aus obigen Ausdrücken, dass die Polhöhenbestimmung in höheren Breiten sicherer ausfallen wird, als in den Äquatorgegenden, während der wahrscheinliche Fehler einer Zeitbestimmung, weil für ihn $\cos^2\varphi$ im Nenner steht, in niederen Breiten sich kleiner ergeben wird.

§ 6.

Bei der Entwickelung des wahrscheinlichen Fehlers im vorigen Paragraphen wurde vorausgesetzt, dass die Höhenänderung des Fernrohrs bei den Einstellungen auf die drei Sterne vollständig durch das Niveau angezeigt wird. Es ist aber zu berücksichtigen, dass eine Schlotterung innerhalb des Instruments bei ungenügender Verbindung des Niveaus mit dem Fernrohr bewirken kann, dass die Höhe, in welcher beobachtet ist, eine andere sein wird, als sie der Ablesung der Blase entsprechen würde.

Sei ε_1 der wahrscheinliche Betrag der so unerkannt gebliebenen Änderung der Höhe des Fernrohrs zwischen der Beobachtung des ersten und des zweiten Sterns, ε_2 das gleiche für den ersten und den dritten Stern, so würde der Gesamtfehler s für den zweiten Stern den Ausdruck erhalten

$$s = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{v^2 \cos^2 \varphi \sin^2 a} + \frac{\varepsilon_1^2}{\cos^2 \varphi \sin^2 a}} ;$$

und ähnliches würde für den dritten Stern sich ergeben. Es kämen dann zu den Ausdrücken für $r^2(\varphi)$ und $r^2(\Delta u)$ noch Glieder hinzu von der Form

$$\frac{4}{9}\left[\varepsilon_1^2 \cos^2 a'' + \varepsilon_2^2 \cos^2 a'''\right]$$

$$\text{resp. } \frac{4}{9\cos^2\varphi}\left[\varepsilon_1^2 \sin^2 a'' + \varepsilon_2^2 \sin^2 a'''\right].$$

Um uns einen Begriff machen zu können von der Grösse des wahrscheinlichen Fehlers für eine vollständige Bestimmung nach der Gaussschen Methode, wollen wir für die Konstanten a, b, v, φ gewisse Werte einsetzen. Den Albrechtschen Hilfstafeln entnehmen wir wieder $\alpha = 0^s.07$ $b = 3^s.18$; v nehmen wir $= 10$ an und für φ wählen wir die mittlere Breite von $\pm 45^0$.

Aus bekannten Sätzen über trigonometrische Funktionen folgt

$$\sin^2 a' + \sin^2 a'' + \sin^2 a''' = \frac{3}{2}$$

$$\sin^4 a' + \sin^4 a'' + \sin^4 a''' = \frac{9}{8}$$

$$\cos^2 a' + \cos^2 a'' + \cos^2 a''' = \frac{3}{2}$$

$$\sin^2 a' \cos^2 a' + \sin^2 a'' \cos^2 a'' + \sin^2 a''' \cos^2 a''' = \frac{3}{8}$$

unter der Bedingung, dass

$$a'' = a' + 120^0 \qquad a''' = a'' + 120^0.$$

Der wahrscheinliche Betrag der Schlotterung wurde wie folgt ermittelt:

Bezeichnen in der nebenstehenden Figur Z das Zenith, Z' den Pol der Vertikalachse, K das Kreisende der Horizontalachse, Z' O die Nullrichtung, so besteht zwischen den die Lage von Z' bestimmenden Grössen $Z\,Z' = \mu$ und $Z\,Z'\,O = \beta$ einerseits und der Stellung der Blase der Höhenlibelle l und der Ablesung des Horizontalkreises $A' = O\,Z'\,K$ andrerseits die Gleichung

$$l = l_0 + \mu \cos A' + \beta\,,$$

wo l_0 gleich dem Werte von l für $\mu = 0$.

Aus drei Gleichungen von dieser Form lassen sich die jedesmaligen Werte der Unbekannten l_0, μ, β bestimmen; hat man eine grössere Zahl, so erhält man zugleich einen Massstab für die Genauigkeit der Niveauangabe.

Auf diese Weise erhielt ich aus einer zweimal wiederholten Reihe von je 36 Ablesungen, bei denen das Fernrohr jedesmal 20°, einmal in der einen, das zweite Mal in der entgegengesetzten Richtung gedreht worden war, den wahrscheinlichen Fehler einer Niveauangabe einschliesslich des zufälligen Ablesungsfehlers

$$\pm\, 0.^{p}86 = \pm\, 2.''4.$$

Der vollständige Ausdruck des wahrscheinlichen Fehlers von $r(\varphi)$ und $r(\Delta u)$ würde hiermit nach Einsetzung der Konstanten lauten

$$r^2(\Delta u) = \frac{2}{3}\,\frac{3^s.18^2}{100\cos^2\varphi} + \frac{0^s.07^2}{2} + \frac{4\cdot 2.''4^2}{2025\cos^2\varphi}\,(\sin^2 a'' + \sin^2 a''')$$

$$r^2(\varphi) = \frac{2}{3}\,\frac{3^s.18^2}{100} + \frac{0^s.07^2\cos^2\varphi}{6} + \frac{4\cdot 2.''4^2}{2025}\,(\cos^2 a'' + \cos^2 a''')$$

Die mittleren Werte von $\sin^2 a'' + \sin^2 a'''$ bez. $\cos^2 a'' + \cos^2 a'''$ sind unter der Voraussetzung, dass $a''' = a'' + 120°$ ist, wie eine einfache Integration zeigt, gleich 1. Demnach erhalten wir schliesslich für $\varphi = \pm 45°$:

$$r(\Delta u) = \pm\, 0^s.40$$
$$r(\varphi) = \pm\, 4.''19.$$

Bei Anwendung derselben Vergrösserung würde man am Aequator finden

$$r(\Delta u) = \pm\, 0^s.28$$
$$r(\varphi) = +\, 4.''20.$$

Um auch den Einfluss der Vergrösserung zu übersehen, wurden die Werte unter der Annahme von $v = 20$ gerechnet, und es wurde erhalten

$$\left.\begin{aligned} r(\Delta u) &= \pm\, 0^s.24 \\ r(\varphi) &= \pm\, 2.''48 \end{aligned}\right\} \text{ für } \varphi = \pm\, 45°$$

$$\left.\begin{aligned} r(\Delta u) &= \pm\, 0^s.17 \\ r(\varphi) &= \pm\, 2.''49 \end{aligned}\right\} \text{ für } \varphi = 0°$$

Unter Voraussetzung der wahrscheinlichen Antrittsfehler von $\pm\, 0^s.5$ bei den beiden ersten Sternen des obigen Beispiels und $\pm\, 0^s.75$ bei dem dritten Stern — entsprechend den aus der

Tafel entlehnten Werten für die Azimuthe -90^0, $+120^0$, $+40^0$ ergaben sich als wahrscheinliche Fehler der Antrittszeiten an den Mittelfaden

$$r(\Delta u') = \pm \frac{0^s.5}{\sqrt{3}} = \pm 0^s.29$$

$$r(\Delta u'') = \pm \frac{0^s.5}{\sqrt{3}} = \pm 0^s.29$$

$$r(\Delta u''') = \pm \frac{0^s.75}{\sqrt{3}} = \pm 0^s.43$$

und hieraus mit Hilfe der Koefficienten der Differentialformel in § 4

$$r(\Delta u) = \pm 0^s.19$$
$$r(\varphi) = \pm 3.''0.$$

Mit Berücksichtigung des Einflusses der Schlotterung würde folgen

$$r(\Delta u) = \pm 0^s.22$$
$$r(\varphi) = \pm 3.''6.$$

Die eben angegebenen Beispiele zeigen zur Genüge, dass die Gausssche Methode Vortreffliches leistet. Zieht man in Betracht, dass sie die einzige ist, welche gleichzeitig Zeit und Polhöhe finden lehrt, ohne an die Qualität des Instruments zu grosse Ansprüche zu stellen, und dass die Art der Beobachtung an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lässt, indem ausser der Uhrangabe bei der Bisektion des Sterns durch den horizontalen Faden nur noch der jedesmalige Niveaustand abzulesen ist, so wird der Reisende mit Vorteil von ihr Gebrauch machen.

Es ist übrigens zu bemerken, dass auch der Sextant ein geeignetes Instrument für die Anwendung der Gaussschen Methode ist, unter Umständen d. h. bei unsicherer Verbindung des Niveaus mit dem Fernrohr einem Theodolithen vorzuziehen sein wird. Man wird dann die Beobachtung vorteilhaft so einrichten, dass man die Deckung des durch den Quecksilberhorizont reflektierten und des direkten durch zweimalige Reflektion an den Sextantenspiegeln gesehenen Bildes an dem Durchschlagen des letzteren durch das erstere beurteilt, indem man das Instrument um die optische Achse des Fernrohrs hin und her bewegt.

Will man die Gausssche Methode der Polhöhen- und Zeitbestimmung mit den sonst üblichen Methoden — der Bestimmung durch Messung von Zenithdistanzen in der Nähe des Meridians und des I. Vertikals — hinsichtlich ihrer Genauigkeit vergleichen, so wird eine Annahme über die Sicherheit der Ablesung und die Genauigkeit der Teilung des angewandten Instruments gemacht werden müssen. Ich lege hier diejenigen Zahlen zugrunde, welche sich mir an dem Hildebrandschen Theodolithen ergeben haben, muss aber bemerken, dass dieselben unter den günstigsten Umständen und an einem noch wenig gebrauchten Instrument gewonnen worden sind, dessen Höhenkreis mittelst der Nonien unmittelbar 30″, durch Schätzung sogar 10″ ablesen liess. Aus zwei zur Bestimmung der Excentricität ausgeführten Messungsreihen, bei denen die Fernrohrstellung um je 5^0 in Höhe geändert und beide Nonien abgelesen wurden,

ergab sich der w. F. einer Nonienablesung $\pm 5.''8$ oder der w. F. des Mittels aus 2 Nonien, $\pm 4.''1$, ein Betrag, der um so kleiner erscheint, als darin die Teilungsfehler des Kreises inbegriffen sind. Ferner erhielt ich aus einer Reihe von Einstellungen eines Sternes 2. Grösse (α urs. min.) in der Nähe des Meridians den w. F. einer Einstellung einschliesslich des Ablesungs- und zufälligen Teilungsfehlers $\pm 6.''8$, so dass für den wahrscheinlichen Einstellungsfehler selbst folgt $\pm 5.''4$.

Nimmt man nun den günstigsten Fall der Polhöhenbestimmung an, d. h. setzt man das Azimuth $a = 0$ oder $= 180^0$, so wird unter Voraussetzung einer einmaligen Einstellung des Sternes in jeder Kreislage das Quadrat des w. F. der resultierenden Polhöhe

$$r^2(\varphi) = \frac{6.''8^2}{2} + \frac{2.''4^2}{2} \text{ oder } r(\varphi) = \pm 5.''1.$$

Wenn für die Zeitbestimmung das Azimuth $= 90^0$ oder 270^0 gesetzt wird, so erhält man

$$r_u^2 = \frac{1}{15^2 \cos^2 \varphi}\left[\frac{4.''1^2}{2} + \frac{2.''4^2}{2}\right] + \frac{0.''45^2}{2}$$

$$\text{oder } r_u = \pm 0^s.45 \text{ für } \varphi = 45^0$$

$$= + 0^s.39 \text{ für } \varphi = 0^0.$$

Diese Beträge sind zwar von nahe derselben Ordnung, wie die für die Gausssche Methode ermittelten Werte; mit Rücksicht auf das oben Gesagte und in Erwägung der Umstände, unter denen der Reisende oft zu arbeiten hat, wird man die Fehler aber im allgemeinen erheblich grösser veranschlagen müssen und zwar in weit höherem Maasse bei den gewöhnlichen Methoden, die eine Ablesung der Kreise verlangen, als bei der Gaussschen Methode. Hierzu kommt, dass weit leichter dort als hier konstante Fehler auftreten werden, zu deren Elimination es — besonders bei Benutzung des Sextanten oder Prismenkreises — erforderlich ist, die Beobachtungen zu beiden Seiten des Zeniths auszuführen. Allerdings werden im letzteren Falle auch die w. F. des Mittels geringer werden und sich von den oben berechneten Werten auf $r\varphi = \pm 3.''6$, $r_u = \pm 0^s.32$ resp. $= \pm 0^s.28$ reduzieren; dementsprechend ist aber bei Anwendung des Gaussschen Verfahrens meistens die Möglichkeit gegeben, durch Vervielfältigung der Beobachtung an mehreren Fäden die Sicherheit des Resultats zu erhöhen. Der hierfür erforderliche Zeitaufwand wird aber wohl immer weit geringer sein als bei Wiederholungen der Beobachtungen nach den andern Methoden.

Was die Zingersche Methode betrifft, so kann man schon von vornherein sagen, dass sie der Gaussschen nur um unbedeutendes überlegen sein kann, wenn man für beide Methoden die günstigsten Bedingungen einhält, dass sie aber bei Azimuthen unter 60^0 ein weniger genaues Resultat liefern wird. Lässt man in dem bei Zinger a. a. O. (§ 19) gegebenen Ausdruck für das Quadrat des w. F. einer Uhrkorrektion die Fehler der Koordinaten der Sterne, die Veränderung des persönlichen Fehlers zwischen den korrespondierenden Beobach-

tungen und den Einfluss der Breite weg, so lautet derselbe unter Annahme, dass beide Sterne an einem Faden beobachtet sind:

$$r^2(\Delta u) = \frac{1}{2}\left\{ dt^2 + \left(\frac{1}{15\cos\varphi\sin a}\right)^2 (dh^2 + di^2)\right\}.$$

Hierin bedeuten

dt den w. F. der Auffassung der Durchgangszeit eines Sterns durch den Horizontalfaden.

dh und di die Änderungen, welche der Kreis resp. das Fernrohr und das Niveau zwischen den Beobachtungen beider Sterne erfahren und deren Quadratsumme dem ε^2 des § 5 entsprechen würde.

Nach Einsetzung der numerischen Werte wird

$$r^2(\Delta u) = \frac{1}{2}\left\{ 0^s.07^2 + \frac{3^s.18^2}{100\cos^2\varphi\sin^2 a} + \frac{2.''4^2}{225\cos^2\varphi\sin^2 a}\right\}$$

oder

$$\begin{aligned} r(u) &= \pm\, 0^s.71 \text{ für } a'' = -a' = 30^0 \\ &= \pm\, 0^s.41 \quad ,, \quad a'' = -a' = 60^0 \\ &= \pm\, 0^s.35 \quad ,, \quad a'' = -a' = 90^0. \end{aligned}$$

§ 7.

Das Prinzip der Gaussschen Methode verlangt die Kenntnis der Zeiten, zu welchen drei verschiedene Sterne in dieselbe Höhe kommen, und diese kann auf dreifache Weise erreicht werden. Wir wollen zunächst den einfachsten Fall betrachten; dieser besteht darin, dass man mit Hilfe eines Sextanten oder eines Theodolithen die Zeiten beobachtet, wann drei Sterne eine durch die Stellung des grossen Spiegels bez. des Fernrohrs bedingte, aber ihrem genauen Betrage nach unbekannte Höhe erreichen. Dann wird unsere Forderung streng erfüllt sein, wenn der Sextant in der Zwischenzeit sich nicht geändert hat, bez. das Fernrohr des Theodolithen seine Lage in Höhe beibehalten, oder wenigstens das Niveau die etwaige Höhenänderung angezeigt hat. Die Refraktion wird im allgemeinen zu vernachlässigen sein, da ihr Betrag für die drei Sterne der gleiche ist unter der hier zulässigen Voraussetzung, dass die Atmosphäre in den verschiedenen Himmelsrichtungen dieselbe Dichtigkeit hat. Nur in dem Falle, dass der Luftdruck und die Temperatur, besonders die letztere während der Zwischenzeiten ungewöhnlich stark sich geändert haben, wäre der verschiedene Wert der Refraktion in Rechnung zu bringen. Sind die 3 Temperaturen bez. T_1 T_2 T_3 und das Mittel

$$\frac{T_1 + T_2 + T_3}{3} = m.$$

so wird man zur Reduktion auf die der Temperatur m entsprechende Refraktion hinreichend nahe die Ausdrücke haben

$$dz_1 = \frac{\rho}{\text{Mod.}}(m - T_1).0.0015 = (7.5383)\,\rho_0\,(m - T_1)$$

$$dz_2 = \frac{\rho}{\text{Mod.}}(m - T_2).0.0015 = (7.5383)\,\rho_0\,(m - T_2)$$

$$dz_3 = \frac{\rho}{\text{Mod.}}(m - T_3).0.0015 = (7.5383)\,\rho_0\,(m - T_3),$$

wo die eingeklammerten Zahlen einen Logarithmus und ρ_0 die mittlere Refraktion bezeichnen. Daraus werden sich nach der Formel

$$d\,t = \frac{d\,z}{15 \cos \varphi \sin a}$$

die Korrektionen der Zeiten berechnen lassen,

Hat man nicht bloss einen, sondern mehrere Fadenantritte beobachtet, so werden die demselben Faden entsprechenden Durchgänge immer eine vollständige Bestimmung ausmachen; aus den so erhaltenen Resultaten wird man zum Schluss das Mittel nehmen müssen. Kürzer wird die Rechnung, wenn man bei bekannter Fadendistanz sämtliche Fadenantritte auf den Mittelfaden reduziert, wozu die folgenden Formeln dienen können (vgl. Herr a. a. O.):

Man berechne $$m = \frac{1}{\cos \varphi \sin a}, \; n = \frac{15}{2} \sin 1'' \; (\mathrm{tg}\, h - m \cot g\, t)$$

$$\log m' = \log m + 0.0001206 \; \Delta \rho;$$

dann ist die Reduktion vom Seitenfaden auf den Mittelfaden

$$l = m' f - m n f^2.$$

Hierin bezeichnet $\Delta \rho$ die Änderung der mittleren Refraktion in Bogensekunden für 1^0 Höhenänderung und f den in Zeitsekunden ausgedrückten wahren Abstand des Seitenfadens vom Mittelfaden. Bei Benutzung einer nach mittlerer Zeit gehenden Uhr ist der Abstand f durch Multiplikation mit 0.99727 (log = 9.99881) in mittlerer Zeit auszudrücken. Hierbei ist zu bemerken, dass, wenn bei allen drei Sternen dieselben Fäden benutzt sind, es auf die genaue Kenntnis der Fadendistanzen nicht ankommt. Die Folge eines falsch angenommenen Wertes wäre nur die, dass die drei Sterne nicht in der Höhe beobachtet worden sind, welche durch den Mittelfaden dargestellt wird, sondern in einem Almukantarath, welcher dem Mittel der Fäden entspricht, für welche die mit den angenommenen Distanzen berechneten Durchgangsmomente gelten. Ein diesbezüglicher Fehler bleibt aber ohne Einfluss auf das Resultat, da die Bedingung der gleichen Höhen immerhin beibehalten ist.

Zur Bestimmung der Fadendistanzen kann entweder die direkte Einstellung von terrestrischen Objekten in Verbindung mit der Ablesung des Höhenkreises oder die Beobachtung von Sternen in der grössten Digression dienen. Für die letztere Bestimmung stelle man das Fernrohr sehr nahe in die Höhe und das Azimuth des Sternes, so dass der Durchgang des letzteren in der Nähe der Kreuzungspunkte des mittleren Vertikalfadens mit den Horizontalfäden erfolgt, und beobachte die einzelnen Durchgangszeiten. Seien u und u_0 die Zeiten für den Durchgang durch einen Seiten- und einen Mittelfaden, so wird die Fadendistanz gefunden aus

$$f^s = \frac{1}{\sin 1''} \frac{\cos \delta}{15} \sin (u - u_0).$$

An diesen Betrag ist aber wegen der Strahlenbrechung die Korrektion $- f \frac{\Delta \rho}{3600}$ anzubringen, wo $\Delta \rho$ die obige Bedeutung hat und f in Zeitsekunden ausgedrückt ist.

Das zweite Beobachtungsverfahren besteht darin, dass man den Sextanten oder den Prismenkreis resp. das Universalinstrument auf verschiedene, bei den drei Sternen aber unter

sich gleiche Höhen einstellt und die Durchgangszeiten beobachtet. Man wird dann die für das Mittel der Höhen gültige Zeit nach bekannten Formeln*) ableiten können. Es möge H das für Refraktion bereits verbesserte Mittel der Höhen sein, $u_1\, u_2\, u_3$ die einzelnen Uhrangaben, U ihr Mittel, so hat man, wenn eine genäherte Uhrkorrektion Δu bereits bekannt ist:

$$\Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}(U - u)}{\sin 1''} = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}(U - u_1)}{\sin 1''} + \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}(U - u_2)}{\sin 1''} + \ldots$$

$$T = 15\,(U + \Delta u - \alpha)$$

$$\sin A = \frac{\cos \delta \sin T}{\cos H}$$

$$\sin B = \frac{\cos \varphi \sin T}{\cos H}$$

$$\Delta U = \frac{\Sigma\, 2 \sin^2 \frac{1}{2}(U-u)}{\sin 1''} \frac{\cos A \cos B}{\sin T} \frac{1}{15n},$$

wenn n die Anzahl der gemessenen Höhen bedeutet. Die dem Mittel der Höhen entsprechende Zeit ist dann

$$t = U + \Delta U.$$

Drittens kann man auch mehrere Messungen jedes der drei Sterne in verschiedenen und für die drei Sterne nicht gleichbleibenden Höhen vornehmen — bei den schneller bewegten Sternen durch Beobachtung der Durchgangszeiten bez. beim Sextanten durch Beobachtung des Momentes der Deckung der beiden Bilder, bei den langsamer bewegten dagegen durch direkte Einstellung — und die Zeiten der gleichen Höhe daraus ableiten. Es mögen für diesen letzten Fall bedeuten

$K'_1\ K'_2\ K'_3$
$K''_1\ K''_2\ K''_3$
$K'''_1\ K'''_2\ K'''_3$

die Einstellungen des Sextanten oder des Kreises bezw. die Ablesungen der Schraube,

$t'_1\ t'_2\ t'_3$
$t''_1\ t''_2\ t''_3$
$t'''_1\ t'''_2\ t'''_3$

die den einzelnen Einstellungen entsprechenden Uhrangaben,

$T'_1\ T'_2\ T'_3$
$T''_1\ T''_2\ T''_3$
$T'''_1\ T'''_2\ T'''_3$

die Momente der gleichen Höhe, wie sie aus den einzelnen Einstellungen folgen,

*) vgl. Sawitsch Anhang I, Nr. 22 und Wislicenus a. a. O.

und K_0 den der gleichen Höhe entsprechenden Wert der Einstellung. Dann wird sein

$$T'_1 = t'_1 + \frac{dt'_1}{dh}\frac{K_0 - K'_1}{15} + \frac{d^2 t'_1}{dh}\frac{(K_0 - K'_1)^2}{1.2.15^2} \sin 1''$$

$$T'_2 = t'_2 + \frac{dt'_2}{dh}\frac{K_0 - K'_2}{15} + \frac{d^2 t'_2}{dh}\frac{(K_0 - K'_2)^2}{1.2.15^2} \sin 1''$$

$$T'_3 = t'_3 + \frac{dt'_3}{dh}\frac{K_0 - K'_3}{15} + \frac{d^2 t'_3}{dh}\frac{(K_0 - K'_3)^2}{1.2.15^2} \sin 1'',$$

wo $$\frac{dt}{dh} = -\frac{1}{\cos\varphi \sin a}$$

$$\frac{d^2 t}{dh^2} = -\frac{dt}{dh}(\operatorname{tg} h + \frac{dt}{dh}\operatorname{cotg} t).$$ *)

Von den hier aufgeführten Methoden dürfte wohl die erste am meisten den Vorzug verdienen, weil bei ihr die Einfachheit des Gaussschen Verfahrens ungeschmälert zum Ausdruck kommt. Um aber die Durchgangszeiten an mehreren Fäden beobachten zu können, wird es zweckmässig sein, wegen der sich langsamer bewegenden Sterne das Fadennetz mit einigen Fäden in engeren Abständen zu versehen. Es bedarf wohl kaum hervorgehoben zu werden, dass eine genaue Kenntnis der Fadendistanzen verlangt wird, wenn die drei Sterne nicht an denselben Fäden beobachtet worden sind.

Bei der erweiterten zweiten und dritten Methode wird ein neues Element, der Ablese- oder Einstellungsfehler, in letzterem Falle auch der zufällige Teilungsfehler, in die Messung eingeführt, und dadurch der ganze Beobachtungsmodus erschwert. Andrerseits gewährt aber gerade die dritte Methode dem geübten Beobachter die Möglichkeit, in kurzer Zeit eine grössere Anzahl von Durchgängen zu erhalten und die Zeit der gleichen Höhe auf eine Menge von Momenten zu basieren. Es wird hierbei aber darauf zu achten sein, dass man die einzelnen Durchgänge möglichst symmetrisch zu dem Moment der gleichen Höhe gruppiert. Dabei hat die dritte Methode vor der zweiten das voraus, dass sie auch dann angewandt werden kann, wenn einer der drei Sterne in der Nähe des Meridians ist. Bei Benutzung eines Sextanten oder Prismenkreises wird man, da hier die Beobachtung mit grosser Unsicherheit verbunden ist, wohl immer auf die beiden letzten Methoden und vornehmlich auf die dritte angewiesen sein, wenn man sich nicht auf die Beobachtung des einzigen Moments der gleichen Höhe beschränken will.

§ 8.

Ein wesentliches Bedürfnis für die Anwendbarkeit einer Methode zur geographischen Ortsbestimmung für den Reisenden ist, dass er sie zu jeder beliebigen Zeit ausführen kann. Eine Untersuchung, ob für jeden Ort der Erde innerhalb nicht zu langer Zeit drei Sterne dieselbe Höhe erreichen, wird zeigen, wie weit die Gausssche Methode dieser Forderung nachkommt.

*) vgl. die Tafel I am Ende der Abhandlung.

Zu dem Zwecke denken wir uns die 120 Sterne bis zur dritten Grösse gleichmässig über den Himmel verteilt und zerlegen die uns sichtbare Himmelskugel in 10° breite Zonen. Die Anzahl der in einer solchen Zone vorhandenen Sterne wird sich zu der Gesamtzahl verhalten, wie die Zonenfläche zu der halben Kugeloberfläche, d. i.

$$\frac{2\,r^2\pi}{2\,r\pi\,h} = \frac{60}{x}.$$ Hierin ist

$$h = r\left\{\sin(\alpha + 5^0) - \sin(\alpha - 5^0)\right\},$$ wenn

α die jedesmalige Höhe bis zur Mitte der Zone, und r den Kugelradius bezeichnet.

Man findet $x = 120 \cos\alpha \sin 5^0$ und damit für die einzelnen Zonen folgende Zahlen:

Zone	Anzahl der Sterne.
0° bis 10°	10,42
10° „ 20°	10,11
20° „ 30°	9,48
30° „ 40°	8,57
40° „ 50°	7,40
50° „ 60°	6,00
60° „ 70°	4,42
70° „ 80°	2,69
80° „ 90°	0,87.

Im allgemeinen wird man also drei Sterne finden, deren Höhen um nicht mehr als 10° von einander verschieden sind und unter der Voraussetzung der gleichmässigen Verteilung 120° Azimuthdifferenz mit einander bilden; nur über 75° Höhe, wo $x < 3$, wird es sich ereignen können, dass man innerhalb gewisser Zeit keine passenden Sterne ausfindig machen kann.

Stellen wir uns nun vor, dass von diesen drei Sternen der eine auf der oberen Begrenzung der Zone liegt, der zweite als ruhend in der Mitte der Zone gedacht wird, der dritte auf dem unteren Kreise der Zone gelegen ist, und ausserdem, dass der erste sich nach unten, der dritte nach oben bewegen möge. Denken wir uns ferner, dass der erste und der dritte Stern gleich viel Zeit gebrauchen, um nach der Mitte zu gelangen, so wird eine vollständige Beobachtung

$$\frac{10^0}{2}\,\frac{1}{\cos\varphi \sin a} = \frac{20^m}{\cos\varphi \sin a}$$

in Anspruch nehmen, im grossen und ganzen wohl selten mehr als eine halbe bis dreiviertel Stunde.

Es ist natürlich, dass diese apriorische Erörterung wegen der dabei gemachten Annahmen die wirklichen Verhältnisse nur genähert darstellen kann; es war uns hier nur darum zu thun zu beweisen, dass das Resultat sich nicht so ungünstig gestaltet, wie man vielleicht von vornherein glauben könnte.

Zweiter Abschnitt.

§ 9.

Nachdem im ersten Abschnitt alles auseinandergesetzt worden ist, was die Berechnung der Beobachtungen und die Genauigkeit des Resultats betrifft, wollen wir uns in diesem mit dem praktischen Teil und vornehmlich mit dem in Betracht zu kommenden Instrument näher beschäftigen. Die Forderung, dass man bloss die Zeiten zu notieren hat, zu welcher 3 Sterne durch denselben Almukantarath gehen, lässt schon erkennen, welche Instrumente für die Beobachtung zu berücksichtigen sind. Sieht man ab von dem Zenithteleskop, welches zwar für Messungen dieser Art die erste Stelle beanspruchen würde, aber von dem Forschungsreisenden hinsichtlich der geringeren Verwendbarkeit kaum mitgeführt wird, so verbleiben der Sextant oder Prismenkreis und das Universalinstrument, welch letzteres die Bedingung zu erfüllen hat, dass etwaige zufällige oder systematische Änderungen in der Höhe des Fernrohrs durch eine gewöhnliche Höhenlibelle angezeigt werden, oder besser durch ein mit dem ersteren bei jedem Stand leicht zu verbindendes Niveau.

Die verschiedenen Beobachtungsarten sind in § 7 des näheren auseinandergesetzt worden. Nach dem ersten dort erwähnten Verfahren würde der Vertikalkreis nur als Einstellungskreis benutzt werden; ebensowenig kommt für diesen Fall eine genaue Teilung des Sextanten in Betracht. Als Zeitmesser wird jede Uhr dienen können, deren Gang für die Dauer der Beobachtungen, also ungefähr eine halbe Stunde konstant bleibt.

Ist das Universalinstrument mit einem Fadennetz versehen, so wird man darauf zu sehen haben, dass die Distanz der Fäden nicht zu gross sei, damit auch für Sterne in der Nähe des Meridians einige Durchgänge vermerkt werden können, ohne dass man befürchten muss, dass inzwischen einer der beiden andern Sterne das Gesichtsbild passiert hat; andrerseits darf sie auch nicht zu klein sein, damit selbst bei Sternen im ersten Vertikal die Beobachtung mit der erforderlichen Musse ausgeführt werden kann.

„Da es nicht sowohl darauf ankommt“, wie Gauss sich ausdrückt, „dass man den Moment haarscharf trifft, zu welchem die Sterne dieselbe Höhe erreichen, als dass zu der angegebenen Zeit die beobachtete Höhe nicht beträchtlich von der gemeinsamen abweicht“, so werden auch Sterne mit sehr hoher Deklination geeignete Objekte zur Beobachtung abgeben. Falls

nun der Polarstern einer der drei Sterne ist, wird sich die Beobachtung des Durchgangs durch das Fadennetz als unpraktisch erweisen, da selbst für die Zeit seiner grössten Elongation und bei geringer Fadendistanz die einzelnen Durchgänge erst in Interwallen von einigen Minuten auf einander folgen würden. In diesem Falle kann eine Mikrometerschraube empfohlen werden, welche gestattet, das Fernrohr um geringe, durch die Ablesung der Schraubentrommel messbare Beträge zu verstellen.

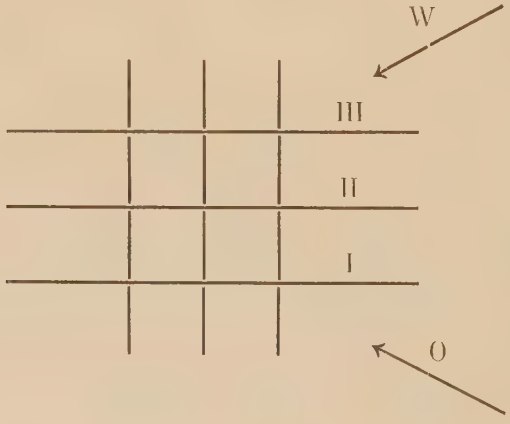
Die eingangs erwähnte, durch die Drehung des Instruments oder andere Einflüsse entstehende Höhenänderung des Fernrohrs muss, wie oben erwähnt, an einem Niveau abgelesen werden können, das sich mit dem Fernrohr oder der Umdrehungsachse desselben unmittelbar oder wenigstens auf indirekte Weise in sichere Verbindung bringen lässt. Das Niveau selbst muss empfindlich genug sein, um noch Höhenänderungen anzuzeigen, welche den bei der Beobachtung der Durchgangszeiten zu befürchtenden Unsicherheiten in der Angabe der Zeit entsprechen.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen gehen wir dazu über, das in der Einleitung genannte Instrument zu beschreiben. Das kleine Reiseinstrument stammt aus der Fabrik von Hildebrand (früher August Lingke & Cie.) in Freiberg i. Sachsen. Es ist gebaut wie ein Universalinstrument und dabei seinem Namen und Zweck entsprechend von sehr geringen Dimensionen. Das Fernrohr hat eine Länge von 14.5 cm und eine 10fache Vergrösserung. Die Objektivöffnung beträgt 2.1 cm; an das Okular kann ein Prisma angesetzt werden. Das Gesichtsfeld kann von der Seite beleuchtet werden und hat einen Durchmesser von ca. 2 Grad Das Fadennetz des Instruments bestand aus drei Vertikal- und ebensoviel Horizontalfäden; der Abstand der beiden äussersten Horizontalfäden vom Mittelfaden betrug

II — III 11′ 13″.1

II — I 11′ 33″.2.

Die Bezeichnung der Fäden ist aus folgender Figur klar; die Pfeile deuten zugleich die Richtung an, in welcher östliche und westliche Sterne das Feld durchliefen, wenn man mit dem Prisma beobachtete, und der Kreis sich rechts befand.



Der Höhenkreis hat einen Radius von 5.3 cm und ist von 20 zu 20 Minuten geteilt; vermittelst zweier Nonien kann man mit der Lupe halbe Minuten ablesen und noch $^1/_6$ Minuten schätzen. Der Horizontalkreis hat einen Halbmesser von 5.1 cm; die beiden Nonien geben hier nur ganze Minuten an. Das Quer-Niveau ist auf dem Lagerstück, welches die Nonien für den Höhenkreis trägt, angeschraubt. Ein Niveauteil wurde auf dem Niveauprüfer zu 27.″9 bestimmt, ist also von ziemlich beträchtlicher Grösse. Die feinen Einstellungen der Kreise geschehen durch die Mikrometerschrauben, von denen uns hier die in Höhe besonders interessiert. Dieselbe soll zugleich als Distanzschraube zum Messen von Entfernungen dienen und hat nach der beigegebenen Schilderung folgende Einrichtung: „eine mit einer geteilten Trommel versehene Mikrometerschraube wirkt gegen den Fernrohrachsenhebel. Der scharfe Rand der Trommel bewegt sich an einem Indexstäbchen entlang, wodurch ganze Umdrehungen, sowie Teile der Umdrehungen der Schraube abgelesen werden können.“ Es ist nicht leicht, bei dieser Einrichtung scharfe Ablesungen zu erhalten, und es wäre wohl praktischer, wenn der Schraubenkopf statt des konisch zulaufenden Teiles eine Scheibe mit radialer Teilung trüge. Zur bequemeren Aufstellung kann das Instrument in ein eisernes Gestell geschraubt oder in die Öffnung eines hölzernen Dreifusses geklemmt werden.

§ 10.

Da das Instrument in jeder Hinsicht die Forderungen zu erfüllen scheint, welche der Reisende an seine astronomischen Werkzeuge stellen muss, so wird dasselbe in den meisten Fällen sehr gute Dienste leisten. Er wird mit ihm alle Methoden der Ortsbestimmung vornehmen können, die ein grösseres Universalinstrument auszuführen erlaubt. Trotz der geringen Grösse der einzelnen Teile des Instruments ist der Betrag der Instrumentalfehler fast erstaunlich klein; besonders scheint bei der Herstellung der Kreisteilung sehr grosse Sorgfalt verwendet worden zu sein.

Einen Massstab zur Beurteilung der Sicherheit der Ablesung und der Grösse der Teilungsfehler bot eine Messungsreihe, bei der von 5 zu 5 Grad die beiden Nonien des Höhenkreises abgelesen wurden. Es ergab sich die Excentricität $= 6.''6$ und der wahrscheinliche Fehler eines Unterschiedes beider Ablesungen $\pm 8.''1$.

Obwohl die Gausssche Methode eine Untersuchung des Instruments nicht eigentlich verlangt, so erschien es mir mit Rücksicht auf den Umstand, dass unter den drei zu beobachtenden Sternen der Polarstern oder ein anderer langsam bewegter Stern sich befinden kann, von Interesse, die Distanzschraube näher zu prüfen. Es kam zunächst darauf an, festzustellen, welche Beziehung zwischen der Kreisablesung und der durch die Drehung der Distanzschraube bewirkten Neigungsänderung des Fernrohrs bestand. Das Ende der annähernd senkrecht stehenden Schraube drückt auf das freie Ende des Hebelarmes. Infolge dessen wird die Drehung des Armes und also auch die Änderung der Kreisablesung gemessen durch die Funktion

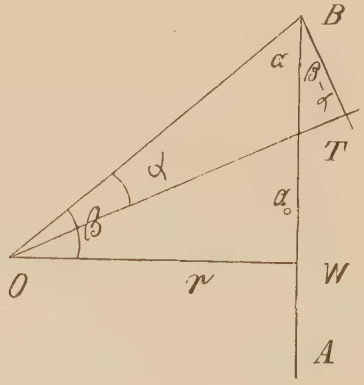
arc tg. Es ist somit für die an der Skala und Trommel abgelesene Grösse die Reduktion von der Tangente auf den Bogen erforderlich; nur in der Nähe des Nullpunktes, für welchen wir am bequemsten den Punkt der Skala wählen, in dem der Hebelarm senkrecht zur Schraube steht, wird eine derartige Rechnung unnötig sein, da für kleine Winkel die Tangente gleich dem Bogen ist. Kennt man den Nullpunkt und ausserdem die Länge des Radius in Schraubenteilen ausgedrückt, so wird es ein Leichtes sein, für jede Schraubenablesung den Winkel zu finden. Derselbe wird erhalten, wenn man den Winkelwert einer Revolution mit der Anzahl der ganzen Umdrehungen und ihrer Teile multipliciert und sodann die Reduktion auf den Bogen vornimmt, welche aus folgender Tabelle ersehen werden kann:

Bogen	Tangente minus Bogen
1° 30′	1.″2
2° 0′	2.9
2° 30′	5.7
3° 0′	9.8
3° 30′	15.7
4° 0′	23.4
4° 30′	33.3
5° 0′	45.8.

Durch lineare Ausmessung wurde gefunden, dass die Länge von 24 Schraubengängen 6 mm beträgt. Demnach entspricht die Länge des Hebelarmes, welche 5 cm mass, 10 000 Schraubenteilen. Zur Kontrole wurde diese Grösse noch auf andere Weise ermittelt, und zwar ergab sie sich in Verbindung mit dem wahren Nullpunkt der Skala auf Grund der folgenden Betrachtung:

In der folgenden Figur möge
OW den Hebelarm darstellen,
BA die Bewegungsrichtung der Schraube,
W den wahren Nullpunkt,
B den an der Skala mit o bezeichneten Strich, und
BOT irgend einen gemessenen Winkel.

TB = a
TW = a_0



Es geht aus der Figur folgende Beziehung hervor:

$$\frac{r}{\cos\beta} - \frac{a\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha} = a\cot g\,\alpha\cos\beta + a\sin\beta$$

$$\frac{r}{\cos^2\beta} = a\cot g\,\alpha + a\,tg\,\beta$$

Für jeden Winkel α erhält man eine derartige Gleichung. Sind nun m Schraubendrehungen gemessen, die symmetrisch zu beiden Seiten des Anfangspunktes liegen, so folgen nach der Methode der kleinsten Quadrate die beiden Gleichungen

$$m\,\frac{r}{\cos^2\beta} - [a]\,tg\,\beta - [a\cot g\,\alpha] = 0$$

$$-[a]\,\frac{r}{\cos^2\beta} + [a\,a]\,tg\,\beta + [a\,a\cot g\,\alpha] = 0$$

und daraus wegen $[a] = 0$

$$tg\,\beta = \frac{-[a\,a\cot g\,\alpha]}{[a\,a]}$$

$$r = \frac{\cos^2\beta}{m}\,[a\cot g\,\alpha]$$

$$a + a_0 = r\,tg\,\beta.$$

Die Werte der einzelnen Schraubenumdrehungen wurden wie folgt bestimmt: vor das Objectiv des Reiseinstruments wurde ein zweites grösseres Universalinstrument derart aufgestellt, dass man durch das Okular des letzteren sehend die beiden Mittelfäden der Fadennetze zur Deckung bringen konnte. Mit Hilfe der Distanzschraube, welche immer um eine Revolution gedreht wurde, erfolgte eine Verschiebung des Fadennetzes des Reisetheodolithen, und der Betrag dieser Drehung wurde an dem mit Mikroskopenablesung versehenen Höhenkreise des andern Instruments abgelesen. Hiermit ergaben sich die beobachteten Winkelwerte der Schraube wie folgt:

Schraubenables.		Schraubenables.	
− 12	17′ 6″	0	17′ 16″
− 11	9	+ 1	17
− 10	9	+ 2	16
− 9	3	+ 3	14
− 8	10	+ 4	12
− 7	14	+ 5	11
− 6	10	+ 6	15
− 5	17	+ 7	15
− 4	14	+ 8	13
− 3	12	+ 9	6
− 2	9	+ 10	10
− 1	14	+ 11	11.
0		+ 12	

Daraus folgte:

$$[a\cot g\,\alpha] = 4784.139$$
$$[a^2\cot g\,\alpha] = -57.53$$
$$[a^2] = 1300$$
$$\beta = +2^\circ\,32'\,2''$$
$$r = 198.96 \text{ revolut.}$$
$$a + a_0 = 8^r.808.$$

Der wahre Nullpunkt liegt somit 8 Umdrehungen 40p.4 unterhalb des an der Skala bezeichneten; für einen pars erhält man im Durchschnitt den Wert 20″.72. Demnach ist der der Schraubenablesung A zukommende Winkel γ aus der Gleichung zu berechnen:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{A - 8.808}{198.96}.$$

Die Untersuchung betreffend den Nullpunkt der Skala wird von Zeit zu Zeit zu wiederholen sein, da sich herausgestellt hat, dass derselbe allem Anscheine nach nicht konstant ist. In der That ist dies von vornherein wahrscheinlich, denn einerseits ist der Achsenhebel aus einem nachgiebigen Metall (Messing) hergestellt, welches ausserdem mit einer Lackschicht überzogen ist, die bei häufigem Gebrauch des Instruments immer dünner werden muss. Andrerseits kommen bei der Bewegung der Schraube bez. des Hebels immer andere Teile zur Berührung, so dass eine mit der Zeit veränderliche Rinne in dem Hebel entstehen muss.

Aus denselben Gründen ist es erklärlich, dass die periodischen Fehler der Schraube nicht nur sehr gross, sondern auch für einzelne Teile derselben sehr verschieden von einander gefunden wurden.

Herr Wanach war so gütig, mir die von ihm gemachten Messungen zur Verfügung zu stellen. Auf die oben beschriebene Weise erhielt er bei einer Bewegung um je 5 partes $= \frac{1}{10}$ Schraubenrevolution vom oberen Ende der Schraube nach unten gezählt folgende Werte:

	0p	5p	10p	15p	20p	25p	30p	35p	40p	45p	50p
— 12r	104	103	104	96	98	101	97	100	110	110	
— 11	109	101	107	96	95	91	101	109	108	110	
— 10	96	101	102	102	92	95	103	99	115	110	
— 9	106	110	99	102	98	89	99	105	113	110	
— 8	102	97	108	95	104	95	100	102	108	109	
— 7	111	108	100	98	102	94	98	108	102	109	
— 6	111	108	98	102	99	104	98	106	108	100	
— 5	107	110	101	104	97	106	101	102	109	98	
— 4	107	102	107	99	102	101	103	100	107	101	
— 3	108	102	107	101	104	111	95	100	101	101	
— 2	110	103	107	102	108	104	99	105	96	108	
— 1	96	108	108	101	111	103	104	98	103	98	
0	99	107	110	105	100	108	97	104	103	97	
+ 1	111	99	109	106	111	98	102	100	106	97	
+ 2	106	110	108	110	102	101	104	97	104	98	
+ 3	105	100	110	111	105	102	106	100	93	107	
+ 4	104	110	109	115	93	101	107	111	83	100	
+ 5	105	106	111	110	108	102	100	98	100	100	
+ 6	100	111	110	109	101	102	105	97	102	99	
+ 7	101	108	107	114	103	101	102	101	98	103	
+ 8	102	107	112	110	106	102	100	103	96	97	
+ 9	103	107	112	111	105	104	97	100	97	103	
+ 10	106	105	110	110	101	106	101	102	93	97	
+ 11	109	104	110	115	100	102	105	95	100	108	

Fasst man je 6 Revolutionen zusammen, so ergeben sich folgende Mittelwerte:

		0p	5p	10p	15p	20p	25p	30p	35p	40p	45p	50p
— 12r bis —		7r	106	103	103	98	98	94	100	104	109	110
— 6 „ —		1	106	105	105	101	103	105	100	102	104	101
0 „ +		5	105	105	109	109	103	102	103	102	98	100
6 „ +		11	104	107	110	111	103	103	102	100	98	101

Wie diese Messungsreihe zeigt, ist der Gang der Schraube ein ziemlich unregelmässiger. Die sich ergebenden periodischen Fehler ausgedrückt durch eine sin- und cos-Reihe des einfachen und doppelten Drehungswinkels waren sowohl für einzelne Umdrehungen in der Nähe des Nullpunktes als auch für die Mittel aus den je 6 Umdrehungen so abweichend von einander, dass an den Differenzen der Ablesungen wohl andere Ursachen als periodische Ungleichheiten beteiligt sein müssen, und dass es daher zwecklos sein dürfte, letztere berücksichtigen zu wollen.

In Wirklichkeit wird bei der Gaussschen Methode stets nur ein ganz geringer Teil der Schraube zur Verwendung kommen. Eine Bewegung um 2 oder 3 partes für den Polarstern und um 5p für Sterne in der Nähe des Meridians wird immer genügen, um mehrere Einstellungen zu erhalten. Hier ist es also ganz unnötig, auf die vorhin angegebene Reduktion von der Tangente auf den Bogen Rücksicht zu nehmen.

Dagegen wird es nicht anzuraten sein, vermittelst einer derartigen Schraube mikrometrische Messungen vorzunehmen, die sich auf mehrere Umdrehungen belaufen; es müsste denn sein, dass man von der Konstanz des Nullpunktes der Skala sich überzeugt hat, und dass die periodischen Fehler innerhalb der Unsicherheit der Ablesungsfehler fallen.

Mit Rücksicht auf das oben Gesagte wird es sich übrigens empfehlen, in solchen Fällen, wo wegen der von dem Reisenden mitgeführten magnetischen Apparate die Anwendung von Stahl ausgeschlossen ist, die Schraube und den Hebel aus möglichst hartem Material herzustellen, vielleicht auch die Stützfläche der Schraube durch eine eingesetzte Steinplatte vor Abnutzung zu sichern.

§ 11.

Wir wenden uns nun den mit dem Instrument gemachten Beobachtungen zu, die trotz ihrer geringen Anzahl ein befriedigendes Resultat geliefert haben. Für sämtliche Beobachtungen befand sich der Kreis auf der rechten Seite des Beobachters. Die Korrektion wegen Niveauänderung wurde nach der Formel $\frac{dt}{dh} = -\frac{1}{\cos\varphi \sin a}$ berechnet, wo a sich mit Hilfe eines genäherten Wertes von h und t (= Sternzeit minus Rektaciension) aus der Formel $\sin a = \frac{\cos\delta \sin t}{\cos h}$ ergab. Bei der Ablesung der Blase wurde der Nullpunkt der Zählung an das

Objektivende gelegt. Die gemeinsame Höhe wurde stets auf den Niveaustand der ersten Beobachtung bezogen, so dass für die beiden andern Sterne folgende Regel galt: Das Fallen des Niveaus hat zur Folge, dass die Beobachtungszeit der westlichen Sterne zu klein, die der östlichen zu gross ist. Das Umgekehrte gilt für ein Steigen des Niveaus.

Bei den Strassburger Beobachtungen stand das Instrument auf einem Pfeiler in dem Garten der Sternwarte; durch Triangulation wurde für den Standort gefunden $\varphi = +48^0\ 34'\ 57''.0$. Bis auf die Beobachtung des ersten Abends, an welchem eine Taschenuhr benutzt wurde, diente als Beobachtungsuhr ein $^1/_2$ sec-Chronometer von Kessels.

Im Monat September des Jahres 1895 versuchte ich mit dem kleinen Reisetheodolithen die Polhöhe des Ortes Rawitsch — einer ca. 53 km nördlich von Breslau gelegenen Stadt — mittelst der Gaussschen Methode zu bestimmen. Der Beobachtungsort befand sich ca. 100 m nördlich von der Mitte*) der Stadt; die Messtischkarte der K. Preuss. Landesaufnahme ergab für ihn $\varphi = 51^0\ 36'\ 43.''0$. Die Anzahl der Beobachtungen in Rawitsch war leider wegen der sehr ungünstigen Witterung eine sehr geringe; es sind nur 7 Fadenantritte an 4 Abenden beobachtet worden.

Zur Aufstellung des Instruments wurde der hölzerne Dreifuss benutzt. Die horizontale Aufstellung verursachte zwar viele Mühe; man erreichte sie schliesslich, nachdem dicke Holzbretter als Unterlage gewählt waren, in welche die Enden des Dreifusses eingebohrt wurden. Wie man aus den Beobachtungen ersieht, war die Schwankung der Blase in den drei Lagen verhältnismässig gering. Als Uhr diente eine mit Duplexgang versehene Taschenuhr, welche Viertelsekunden schlug und deren Gang für die kurze Dauer der Beobachtungen konstant blieb. Da die Aufstellung des Instruments in einem Garten erfolgte, in welchem viele Bäume und benachbarte Häuser die freie Aussicht zum Himmel teilweise verdeckten, so konnte man der Bedingung der Gleichheit der Azimuthdifferenzen nicht vollständig Genüge leisten.

Bei der Beobachtung des Polarsterns wurde die Distanzschraube nicht benutzt; dagegen gelang es, seinen Durchgang durch zwei Fäden zu notieren und zwar derart, dass man nach dem Durchgang des Polarsterns durch einen Faden auch die beiden andern Sterne an diesem und einem zweiten Faden beobachtete, und man hierauf erst die Zeit abwartete, zu welcher der Durchgang des Polarsterns durch diesen zweiten Faden erfolgte.

---

*) Wie mir H. Prof. Galle in Breslau freundlichst mitteilte, folgt für diese aus älteren Beobachtungen $\varphi = +51^0\ 36'\ 40'' \pm 5''$.

Wir lassen im folgenden die Beobachtungsdaten folgen:

Strassburg.

Datum 1895	Sterne	Uhrangabe			Niveaustand	
Juni 22	α lyrae	15h	1m	34s.0	3p.9	11p.6
	γ urs. maj.		9	33.0	5.4	13.0
	α bootis		22	4.0	4.5	12.2
„ 23	α lyrae	16	16	59.0	4.0	11.2
	η urs maj.		26	23.0	3.9	11.0
	α coronae		48	30.0	4.7	11.9
„ 24	α lyrae	15	24	23.0	4.4	11.8
	γ urs. maj.		36	6.0	3.5	10.9
	α bootis		49	11.0	4.15	11.55
„ 25	α lyrae	15	24	52.0		
			26	0.5	4.9	12.4
			27	7.5		
	γ urs. maj.		32	42.0		
			34	1.0	2.1	9.8
			35	22.0		
	α bootis		44	52.0		
			46	32.0	2.45	10.15
			48	15.5		
„ 26	α lyrae	16	16	40.0	2.9	10.5
			17	48.5		
	η urs. maj.		25	20.5	3.7	11.25
			26	32.5		
	α coronae		47	0.5	3.15	10.95
			48	42.0		
„ 27	α lyrae	16	19	38.0	3.1	11.0
	η urs. maj.		23	23.0	3.7	11.4
	α coronae		44	10.5	3.35	11.25
Juli 3	α lyrae	16	13	41.0		
			14	51.0	3.7	11.1
			16	0.0		
	η urs. maj.		26	30.0		
			27	42.5	3.0	10.5
			28	55.0		
	α coronae		48	51.5		
			50	30.0	3.75	11.15
			52	12.0		

Rawitsch.

Datum 1895	Sterne	Uhrangabe			Niveaustand	
Sept. 24	α urs. min.	9h	22m	15s.0	5p.2	13p.9
	β andromed.		25	5.0	4.8	12.5
	α lyrae		32	19.0	4.5	12.4
„ 25	ζ urs. maj.	7	58	3.5	3.9	11.6
	γ pegasi	8	16	44.5	5.0	12.8
	α ophiuchi		32	11.0	3.0	11.1
„ 26	ζ urs. maj.	7	56	22.0	4.6	12.2
			58	12.5		
		8	0	6.5		
	γ pegasi	8	7	16.0		
			8	34.5	4.7	12.3
			9	52.0		
	α ophiuchi	8	29	43.5	4.8	12.5
			31	3.0		
			32	23.5	5.6	13.2
„ 28	α urs. min.	9	3	0.0	5.9	13.7
			47	5.0		
	β andromed.		10	16.5	6.85	14.45
			11	28.0		
	α lyrae		15	54.0	2.8	10.7
			17	5.0		

In der folgenden Zusammenstellung sind die Resultate aus den vorstehenden Beobachtungen angeführt. Es ist dazu noch zu bemerken, dass die Kolumne $\Delta u'$ die Werte der Uhrkorrektionen enthält, welche aus den Zeitbestimmungen am Meridiankreis folgten und in diesem Falle als die wahren Werte angesehen werden dürfen. Für Juni 22 fehlt die abgeleitete Uhrkorrektion, weil die Uhrvergleichung unterblieben ist. v' bedeutet die Differenz zwischen den einzelnen v und ihrem arithmetischen Mittel; v'' hat die gleiche Bedeutung, wenn die Resultate vom Juli 3 ausgeschlossen werden.

Strassburg.

Datum		Faden	Berechnete Polhöhe	Tagesmittel	v	Berechnete Δu	$\Delta u'$	v	v'	v''
			48° 34′							
1895	Juni 22	II	51″.0	51″.0	— 3″.8					
	„ 23	II	56.7	56.7	+ 1.9	+ 3s.2	+ 3s.2	0s.0	— 0s.5	— 0s.1
	„ 24	II	59.0	59.0	+ 4.2	+ 5.8	+ 6.3	— 0.5	— 1.0	— 0.6
	„ 25	I	55.0	57.2	+ 0.2	+ 7.2	+ 7.9	— 0.7	— 1.2	— 0.8
		II	60.7		+ 5.9	+ 7.8		— 0.1	— 0.6	— 0.2
		III	56.0		+ 1.2	+ 7.9		0.0	— 0.5	— 0.1
	„ 26	II	52.0	50.3	— 2.8	+ 9.4	+ 8.8	+ 0.6	+ 0.1	+ 0.5
		III	48.6		— 6.2	+ 9.7		+ 0.9	+ 0.4	+ 0.8
	„ 27	II	55.6	55.6	+ 0.8	+ 11.5	+ 10.8	+ 0.7	+ 0.2	+ 0.6
	Juli 3	I	49.0	54.5	— 5.8	+ 30.4	+ 28.3	+ 2.1	+ 1.6	
		II	65.4		+ 10.6	+ 30.2		+ 1.9	+ 1.4	
		III	49.0		— 5.8	+ 28.8		+ 0.5	0.0	

Rawitsch.

			51° 36′		
1895	Sept. 24	II	46″.6	46″.6	+ 4″.6
	„ 25	II	41.1	41.1	— 0.9
	„ 26	III	36.5	40.8	— 5.5
		II	41.0		— 1.0
		I	44.8		+ 2.8
	„ 28	I	45.7	42.0	+ 3.7
		II	38.4		— 3.6

Da es bei der geringen Anzahl der Beobachtungen nicht möglich ist, die relative Gewichtseinheit eines auf mehreren Durchgängen beruhenden Resultats zu ermitteln, so wurden alle einzelnen Bestimmungen unter Annahme gleichen Gewichtes kombiniert, und man erhielt für

Strassburg . . . . . 48° 34′ 54″.8 w. F. $\pm$ 1″.0
Rawitsch . . . . . 51° 36′ 42″.0 w. F. $\pm$ 1″.0.

Aus beiden Reihen zusammen ergiebt sich der w. F. einer Beobachtung $\pm$ 3″.2 und mit Weglassung der etwas zweifelhaften Beobachtung vom Juli 3 nur $\pm$ 2″.6. Die Abweichung

der für Strassburg gefundenen Breite von dem wahren Wert (— 2″.2) liegt noch in den Grenzen der Unsicherheit.

Auch in der Vergleichung der gefundenen Uhrkorrektionen Δu mit den wahren Werten $\Delta u'$ tritt für Juli 3 eine starke Abweichung hervor. Sieht man dieselbe als zufällig an, so folgt aus den um den mittleren Unterschied der v (+ $0^s.5$) korrigierten Fehlern v' der w. F. eines $\Delta u = \pm 0^s.60$; schliesst man aber die Beobachtung Juli 3 aus, so würde der konstante Unterschied sich nur auf + $0^s.1$ belaufen und der w. F. sich auf $\pm 0^s.39$ reduzieren.

Die Resultate der hier mitgeteilten Beobachtungen bestätigen, soweit ihre geringe Anzahl überhaupt einen Schluss zulässt, die verhältnismässig grosse Genauigkeit, welche für das Gausssche Verfahren aus der theoretischen Fehlerberechnung folgte.

Dritter Abschnitt.

§ 12.

Wohl mit einigem Recht sagt Zinger in § 2 seiner schon erwähnten Schrift: „was die gleichzeitige Bestimmung der Zeit und der Breite durch Beobachtungen dreier Sterne in ein und derselben Höhe in kleinen Zwischenräumen betrifft, so bietet diese Methode für die Praxis abgesehen von der Spärlichkeit geeigneter Sterne noch andere Schwierigkeiten und dürfte daher schwerlich mit gutem Erfolge und bequem in der Wirklichkeit auszuführen sein". Gauss selbst ist der Ansicht, dass man mit Hilfe eines Globus oder einer stereographischen Projektion leicht drei geeignete Sterne wird ausfindig machen können. Von einem Globus wird man absehen müssen, da der Reisende wohl selten im Besitze eines solchen sein wird, und was die vorgeschlagene Projektion betrifft, so ist zunächt unklar, wie Gauss dieselbe allgemein angewandt wissen wollte. Mit Verzicht auf irgend ein Hilfsmittel wird es für den Reisenden fast unmöglich sein, die Methode anzuwenden, da zu einer beliebigen Zeit eine Aufsuchung dreier gleich hohen Sterne in bestimmter Azimuthdifferenz am Himmel schwierig sein würde, und die vorherige Berechnung für ihn zu mühsam ist.

Die Aufgabe, die Zeit zu bestimmen, wann drei gegebene Sterne für einen Ort dieselbe Höhe erreichen, oder andrerseits drei Sterne zu finden, die für eine bestimmte Zeit in demselben Almukantarath liegen, wird wesentlich vereinfacht, wenn man dieselbe wie folgt umformt: es soll die Zeit angegeben werden, zu welcher zwei Sterne dieselbe Höhe mit einem dritten erreichen, resp. man soll zwei Sterne suchen, die zu einer bestimmten Zeit gleich hoch stehen mit einem dritten. Wählt man als Ausgangsstern einen solchen, der seine Höhe überhaupt nur wenig ändert — für nördliche Breiten ist dies der Polarstern — so wird die Aufgabe lauten: man soll die Zeit berechnen, zu welcher zwei Sterne in eine gewisse Höhe kommen, oder zwei Sterne finden, die zu einer bestimmten Zeit eine gegebene Höhe haben.

In denjenigen Breiten, für welche der Polarstern ein zur Beobachtung ungeeignetes Objekt ist, wird man als Ausgangspunkt einen in der Kulmination befindlichen Stern auswählen. Die Höhe desselben ist durch die Gleichung gegeben

$$z = \pm \varphi \mp \delta \qquad \text{für obere}$$
$$= 180 - (\varphi + \delta) \quad \text{„ untere}$$

Kulmination, wogegen die Höhe des Polarsterns für jeden Stundenwinkel aus Tafeln entnommen werden kann.

Die Gleichungen

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos a$$
$$\sin t = \sin z \frac{\sin a}{\cos \delta}$$

lauten, wenn $a = \pm 120^0$, der Ausgangsstern also ein Südstern ist,

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos z + \frac{1}{2} \cos \varphi \sin z$$
$$\cos \delta \sin t = \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin z$$

und liefern δ und t und damit auch α, da die Sternzeit als annähernd bekannt vorausgesetzt wird. Die Deklination wird für die beiden Sterne dieselbe sein, ihre Rektascensionen werden sich um 2 t unterscheiden. Natürlich werden diesen Werten von α und δ nicht zwei Sterne entsprechen; es werden sich aber immer zwei Sterne finden lassen, deren α und δ den berechneten Werten genügend nahe kommen, und mit den Differenzen $d\alpha_2$, $d\delta_2$ bez. $d\alpha_3$, $d\delta_3$ der berechneten Werte und der den ausgewählten Sternen wirklich zukommenden wird man die ursprüngliche Zeit zu variieren haben unter Benutzung der die Aenderung des Stundenwinkels gebenden Formel

$$d t = \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin t} - \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} t}\right) d \delta.$$

Zu berücksichtigen wäre ferner noch, dass der kulminierende Stern im allgemeinen nicht im Meridian selbst, sondern ausserhalb desselben beobachtet wird. Für seine Zenithdistanz würden die oben gegebenen Ausdrücke dann nicht mehr streng gelten. Der Einfluss einer hierdurch entstehenden Aenderung auf die Beobachtungszeit der beiden andern Sterne wird aber so gering sein, dass derselbe hier, wo die Vorausberechnung der Einstellung nur auf Minuten genau erfolgt, übergangen werden kann. Nennen wir Θ_1 die Beobachtungszeit des kulminierenden Sterns, so werden die Momente zur Einstellung der beiden andern Sterne gegeben durch die Gleichungen

$$\Theta_2 = \Theta_1 + d\alpha_2 + \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin t} - \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} t}\right) d \delta_2$$
$$\Theta_3 = \Theta_1 + d\alpha_3 + \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin t} - \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} t}\right) d \delta_3.$$

Wenn wir z. B. an einem Tage im Monat März um 10^h Sternzeit beobachten wollen, so können wir α leonis, dessen AR $= 10^h\ 3^m$ ist, als Ausgangsstern wählen. Wir erhalten,

wenn $\varphi = 48^0\ 30'$ ist, $t = \pm 3^h\ 54^m$, $\delta = 53^0\ 12'$, und suchen zwei Sterne aus, deren Rektascensionen um ca. 8 Stunden $= 2\,t$ differieren und deren Deklinationen nur um einige Grad von der berechneten abweichen. η urs. maj. (II) und β aurigae (III) sind solche Sterne; ihre Oerter sind

	α	δ
II	$13^h\ 44^m$	$+ 49^0\ 49'$
III	$5^h\ 52^m$	$+ 44^0\ 56'$ und

$$-d\alpha_{II} = 10^h\ 3^m + 3^h\ 54^m - 13^h\ 44^m = + 13^m; \quad -d\delta_{II} = + 3^0\ 23' = 13^m.5$$
$$-d\alpha_{III} = 10^h\ 3^m + 3^h\ 54^m - 5^h\ 52^m = + 17^m; \quad -d\delta_{III} = + 8^0\ 16' = 33^m.$$

Der Ausdruck $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin t} - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg} t}$ wird $= \pm 0{,}51$ und somit

$$\Theta_{II} = 10^h\ 3^m - 13^m + 13^m.5 \cdot 0.51 = 9^h\ 57^m$$
$$\Theta_{III} = 10^h\ 3^m - 17^m - 33^m \cdot 0.51 = 9^h\ 29^m.$$

Man hätte also nach folgender Reihenfolge einzustellen:

β aurigae	$9^h\ 29^m$
η urs. maj.	$9^h\ 57^m$
α leonis	$10^h\ 3^m$.

Wenn man für den Polarstern die Näherungswerte $h = \varphi$, $a = 180^0$ und dementsprechend für die beiden andern $a = \pm 60^0$ setzt, so wird δ und t dieser letzteren gefunden durch die Gleichungen

$$\cos\delta\ \sin t = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\ \cos\varphi$$
$$\cos\delta\ \cos t = \frac{3}{4}\sin 2\varphi.$$

Für einen gegebenen Wert von φ erhält man also bestimmte Werte von δ und $\pm t$. Zur Berechnung der Beobachtungszeiten der beiden Sterne wird man aber jetzt noch einzuführen haben die Differenz $dz = \pi \cos t$ zwischen der zur Beobachtungszeit statthabenden Zenithdistanz des Polarsterns und der angenommenen $z = 90 - \varphi$.

Wir erhalten somit als vollständige Formel, da für $z = 90 - \varphi$ der parallakt. Winkel $p = t$ wird,

$$\Theta_2 = \Theta_1 + d\alpha_2 + \frac{1}{\cos\delta\ \operatorname{tg} t}\ d\ \delta_2 + \frac{1}{\cos\varphi \sin a}\ dz$$
$$\Theta_3 = \Theta_1 + d\alpha_3 + \frac{1}{\cos\delta\ \operatorname{tg} t}\ d\ \delta_3 + \frac{1}{\cos\varphi \sin a}\ dz.$$

Die Koefficienten von $d\delta$ und dz lassen sich in Tafeln bringen, und die Vorausberechnung ist damit auf einige Multiplikationen und Additionen beschränkt.

Suchen wir z. B. um 7 Uhr Sternzeit für die Polhöhe $\varphi = 48^0\ 30'$ die beiden Sterne, welche gleiche Höhe haben mit dem Polarstern ($1^h\ 21^m$, $+ 88^0\ 45'$) und ca. 120^0 im Azimuth nach beiden Seiten von ihm abstehen, so wird sich zunächst ergeben $\delta = + 20^0\ 7'$, $t = \pm 2^h\ 30^m$. Die Rektascensionsdifferenz der beiden Sterne muss demnach 5 Stunden, ihre Deklination etwa 20^0 betragen. Wir sehen, dass das Paar

	α	δ
II α tauri	$4^h\ 30^m$	$+ 16^0\ 18'$
III ε leonis	9 40	$+ 24\ 15$

dieser Forderung nachkommt.

Für sie wird

$$d\alpha_{II} = 0^m \quad d\delta_{II} = -3^\circ\ 49' = 15^m.3$$
$$d\alpha_{III} = 10^m \quad d\delta_{III} = -4^\circ\ 8' = 16^m.5.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\cos\delta\ \mathrm{tg}\,t} = \pm 1.4$$
$$\frac{1}{\cos\varphi \sin a} = \pm 1.7.$$

Um die gegebene Zeit entnehmen wir aus Tafel V für den Polarstern $dz = -7' = -0^m.5$, und damit ergiebt sich

$$\Theta_2 = 7^h\ 0^m - 15^m.3 \cdot 1.4 - 1.7 \cdot 0^m.5 = 6^h\,38^m$$
$$\Theta_3 = 7^h\ 10^m - 16^m.5 \cdot 1.4 + 1.7 \cdot 0^m.5 = 6^h\,48^m.$$

Zur Erzielung grösserer Genauigkeit würde man in der obigen Darstellung auch die zweiten Differentialquotienten zu berücksichtigen haben, worauf man aber bei mässigen Werten von $d\delta$ in der Regel wird verzichten können. Wir haben uns mit der Aufstellung des ersten Differentialquotienten begnügt, weil es uns nur darum zu thun war, den Weg anzudeuten, auf welchem die Vorausberechnung der Momente zur richtigen Einstellung der Sterne erfolgen müsste. Aus demselben Grunde ist auch nicht auf die Differentialformeln zur Verbesserung des ursprünglich angenommenen Azimuths eingegangen worden. Uebrigens wird es in der Praxis zur Einstellung eines Sternes ausreichen, wenn man das Azimuth bis auf einige Grad genau kennt.

Man könnte glauben, dass sich für unsern Zweck ein wesentlicher Nutzen ergeben müsste durch die Benutzung bereits vorhandener Verzeichnisse von korrespondierenden Sternen, die in kurzer Zeit dieselbe Höhe erreichen. Es wäre dies für eine bestimmte Polhöhe vielleicht zutreffend. Im allgemeinen Falle aber würde man jedenfalls nur mit Zuhilfenahme ausgiebiger und umfangreicher Tabellen zum Ziele gelangen, und selbst dann wird es fraglich sein, ob man nicht besser die Berechnung nach der gewöhnlichen Methode ausführt. Wenn man in den Formeln

$$\mathrm{tg}\,\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-\varphi)\ \sin(s-\delta)}{\cos s\ \cos(s-z)}}$$
$$\mathrm{tg}\,\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-\varphi)\ \cos(s-z)}{\cos z\ \sin(s-\delta)}},$$

worin $s = \frac{1}{2}(\varphi + \delta + z)$ ist,

für eine bestimmte Polhöhe setzt

$$b = \frac{z+\varphi}{2} \qquad c = \frac{z-\varphi}{2}$$
$$m = \frac{\sin\left(c + \frac{\delta}{2}\right)}{\cos\left(b + \frac{\delta}{2}\right)} \qquad n = \frac{\sin\left(b - \frac{\delta}{2}\right)}{\cos\left(c - \frac{\delta}{2}\right)},$$

so wird

$$\mathrm{tg}\,\frac{t}{2} = \sqrt{m\,n}$$
$$\mathrm{tg}\,\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{m}{n}},$$

und man kann hiermit die Zeit berechnen, zu welcher gewisse Sterne eine und dieselbe Höhe erreichen. Für die helleren Sterne könnte man sich darnach Tafeln oder graphische Zeichnungen anfertigen, aus denen zu ersehen wäre, wann drei Sterne gleich hoch stehen. Auch dies Verfahren wäre wegen der Verschiedenheit der Tafeln für jede Polhöhe sehr umständlich und soll deshalb hier nicht weiter verfolgt werden. Wir wenden uns vielmehr dem schon angekündigten Projektionsplane zu, der für die Vorbereitungen der Gaussschen Methode die nötigen Hilfsmittel gewährt.

§ 13.

Um zu ersehen, welche Art der Projektion anzuwenden ist, wird es nötig sein, die Bedingungen zu untersuchen, denen sie genügen soll: man soll aus der Karte auf einfache Weise für jeden Ort der Erde und zu jeder Zeit ablesen können, wann drei Sterne in gleiche Höhe über den Horizont kommen, und welches diese Sterne sind. Es wird also eine Sternkarte hergestellt werden müssen nach einer solchen Projektionsart, bei der der Horizont eines jeden Ortes und die ihm parallelen Kreise einfache Figuren werden, welche sich in die Karte einzeichnen lassen. Die Projektion wird aber auch eine derartige sein müssen, dass sie einen möglichst grossen Teil der Himmelskugel darzustellen erlaubt, damit es nicht nötig sei, zwei oder mehrere Karten zu benutzen.

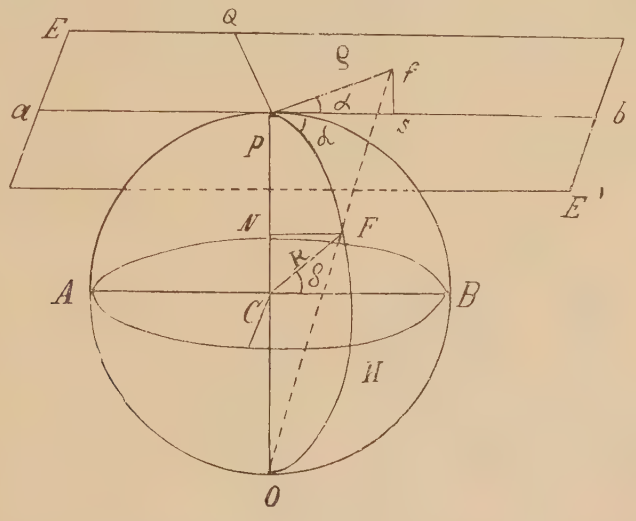
Die letzte Forderung wird in hohem Grade erfüllt von der Merkatorschen Cylinderprojektion, welche gestattet, die ganze Himmelskugel mit Ausnahme der überhaupt nicht zur Darstellung kommenden Umgebungen der Pole auf eine einzige Karte zu zeichnen. Wenn man sich um die Himmelskugel einen Cylinder beschrieben denkt, der im Aequator berührt, und man projiciert vom Mittelpunkt der Kugel aus, so werden sich, da sämtliche schiefe Schnitte eines Cylinders Ellipsen geben, der Horizont mit seinen parallelen Höhenkreisen als Kegelschnitte der genannten Art auf der Cylinderfläche abbilden. Wird nun der Cylinder in eine Plattkarte aufgerollt, so erhält man statt der Ellipsen Kurven, die sich als Funktionen der geographischen Breite und der jedesmaligen Höhe über dem Horizont berechnen und demnach zeichnen lassen. Man hätte dann aber nötig, für jeden Ort der Erde sich ein anderes Netz von Kurven zu konstruieren, und eben hierin besteht der Nachteil bei Anwendung der Merkatorschen Projektion für unsern Zweck. Auch bei den meisten übrigen zur Herstellung von Sternkarten häufig verwendeten Projektionsarten tritt jener Uebelstand hervor; sie sind daher zur Lösung unserer Aufgabe nicht geeignet.

Dagegen ist die stereographische Projektion frei von diesem Nachteil und bietet zur Erreichung unseres Zieles die grössten Vorteile dar. Zunächst kann man durch sie, selbst bei mässiger Grösse des zugrunde gelegten Masses, etwa drei Viertel der Himmelskugel darstellen. Dann aber erfreut sie sich zweier Eigenschaften, welche für unsern Zweck sehr wichtig sind. Die erste ist die Winkeltreue, d. h. zwei von einem beliebigen Punkte der Kugel aus-

gehende Richtungen schliessen in der Projektion dieselben Winkel ein, wie auf der Kugel. Zweitens bildet sich jeder Kugelkreis in der Projektion wieder als Kreis ab.

Zunächst seien nun die Gleichungen aufgestellt, durch welche die Meridiane und Parallelkreise in der Projektion ausgedrückt werden, wobei wir uns aus später anzuführenden Gründen der stereographischen Polarprojektion bedienen werden, bei welcher der Augenpunkt in einem der beiden Pole gedacht wird.

In der folgenden Figur sei A P B O irgend ein Meridian der Himmelskugel, O der Augenpunkt, P der diametral gegenüberliegende Pol, C der Mittelpunkt, F irgend ein Punkt der Himmelskugel mit den Koordinaten α, δ, dessen Projektion f.



Da P s und P f die Projektionen der Meridiane A P B und P F H sind, so folgt nach dem vorher angeführten Satze B P H = f P s.

Wählen wir nun P b und P Q als die Projektionen des Meridians durch den Frühlingspunkt und des zu ihm senkrechten als x- und y-Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so wird

$$y = fs = \rho \sin \alpha; \quad x = Ps = \rho \cos \alpha$$

$$\rho = 2\,R \operatorname{tg} POF = \frac{2\,R \cos \delta}{1 + \sin \delta}$$

$$y = \frac{2\,R \cos \delta \sin \alpha}{1 + \sin \delta}$$

$$x = \frac{2\,R \cos \delta \cos \alpha}{1 + \sin \delta}.$$

Es folgt $y = x \operatorname{cotg} \alpha$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = \frac{4 \cos^2 \delta\, R^2}{(1 + \sin \delta)^2} = 4R^2 \frac{1 - \sin \delta}{1 + \sin \delta}$$

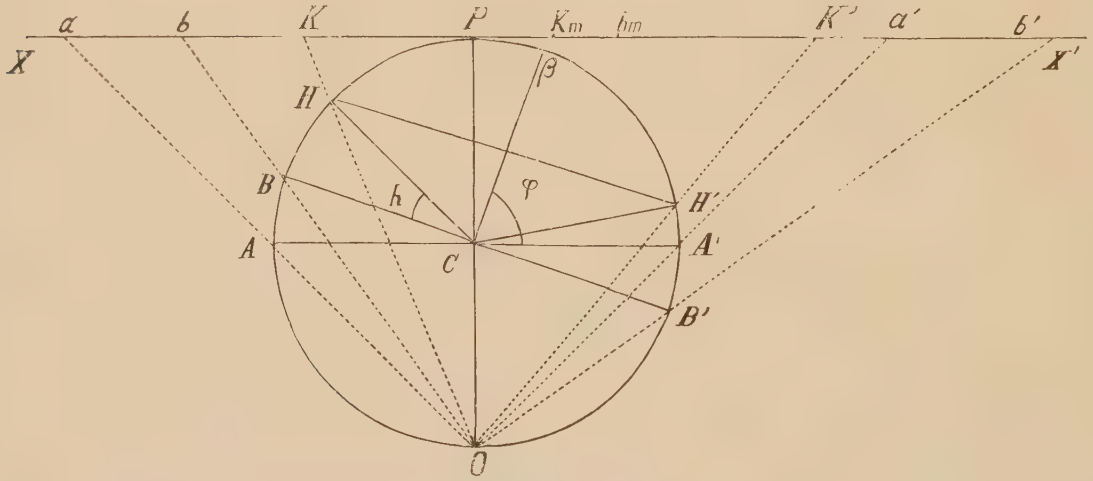
$$= 4\,R^2 \operatorname{tg}^2 \left(45 - \frac{\delta}{2}\right).$$

Diese Gleichungen sagen aus, dass die Meridiane oder Stundenkreise durch gerade Linien dargestellt werden, die mit der x-Achse den Winkel α einschliessen, und dass die Parallelkreise als Kreise abgebildet werden, deren Mittelpunkt im Pol liegt, und deren Radius $\varrho = 2\,R\,\mathrm{tg}\left(45 - \frac{\delta}{2}\right)$ ist, wenn R den Halbmesser des zugrunde gelegten Meridians bezeichnet.

Das Kartennetz wird somit aus lauter konzentrischen Kreisen bestehen mit vom Mittelpunkt ausgehenden Geraden.

§ 14.

Nach dem oben angeführten Satze, dass jeder Kreis auf der Kugeloberfläche nach der stereographischen Projektion wieder als Kreis projiciert wird, ist es möglich, für jeden Ort der Erde den betreffenden Horizontalkreis mit seinen Parallelkreisen in die Karte einzuzeichnen. Man hat dazu aber die Kenntnis einiger Grössen nötig, deren Ableitung zunächst gegeben werden soll.



In obiger Figur stelle A O A'P einen Meridian vor, XX' seine Projektion vom Südpol O aus auf eine den Nordpol tangierende Ebene. β sei ein beliebiger Punkt dieses Meridians auf der Erdoberfläche. Die Ebene der Zeichnung wird von seinem Horizontalkreis in BB' und von irgend einem seiner Höhenkreise in HH' geschnitten. Die Projektionen dieser Linien seien b b' und KK', die in b_m und K_m ihren Mittelpunkt haben.

A A' ist der Schnitt des Aequators und a a' seine Projektion.

Aus der Figur ersieht man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} b\,b' &= P\,b + P\,b' \\ &= 2\,R\left(\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} + \mathrm{cotg}\,\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= 4\,R\,\mathrm{cosec}\,\varphi \qquad (1) \\ b_m\,P &= \frac{1}{2}\,b\,b' - b\,P \\ &= 2\,R\left(\mathrm{cosec}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= 2\,R\,\mathrm{cotg}\,\varphi \qquad (2) \end{aligned}$$

$$K\,K' = P\,K + P\,K'$$

$$P\,K = 2\,R\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi - h}{2}$$

$$P\,K' = 2\,R\,\mathrm{tg}\,POH'$$

$$= 2\,R\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,(HCH' - HCP)$$

$$= 2\,R\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,(180 - h - \varphi)$$

$$= 2\,R\,\mathrm{cotg}\,\frac{\varphi + h}{2}$$

$$\frac{1}{2}\,K\,K' = r = R\left(\mathrm{tg}\,\frac{\varphi - h}{2} + \mathrm{cotg}\,\frac{\varphi + h}{2}\right) \qquad (3)$$

$$K_m P = m = \frac{1}{2}\,K\,K' - K\,P$$

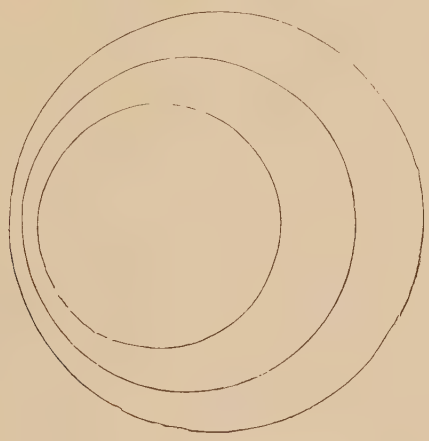
$$= R\left(\mathrm{cotg}\,\frac{\varphi + h}{2} - \mathrm{tg}\,\frac{\varphi - h}{2}\right. \qquad (4)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (1) bis (4) lassen sich für jeden Horizontal- und jeden ihm parallelen Höhenkreis berechnen 1) ihr Radius und 2) die Entfernungen ihrer Mittelpunkte vom Pol der Karte.

Die Formeln (3) und (4) gehen in einander über, sobald man φ und h mit einander vertauscht. Man kann also beide Grössen in eine Tafel bringen, deren Argumente φ und h für K_m P und $\frac{1}{2}$ K K' die umgekehrte Bedeutung haben.

Suchen wir demnach in der Projektion den einer bestimmten Sternzeit entsprechenden Meridian auf, so liegt die Projektion der Zenithe aller Orte, welche gleichzeitig diese Sternzeit haben, auf dieser geraden Linie, und zugleich enthält dieselbe die Mittelpunkte der sämtlichen Horizontal- und Höhenkreise dieser Orte.

Für eine gegebene Beobachtungszeit werden sich also sämtliche Horizontalkreise mit ihren Parallelkreisen als ein System verschieden grosser excentrischer Kreise darstellen, wie in beifolgender Figur, wo der äussere Kreis irgend einen Horizont, die beiden inneren verschiedene Almukantarathe versinnbildlichen.



Würde man alle diese Kreise wirklich in die Himmelskarte einzeichnen, so könnte man allerdings für einen Augenblick ersehen, welche drei Sterne für den betreffenden Ort in gleicher Höhe sind, eine Zeit lang später aber liegen die Mittelpunkte jener Kreise auf einer andern Linie, nämlich auf der Projektion des Meridians, welcher der jeweiligen Sternzeit entspricht, und man müsste das Kreissystem von neuem eintragen.

Es liegt daher nahe, diese Kreise verschiebbar zu machen, indem man sie auf ein durchsichtiges Papier zeichnet, das dann nach Belieben auf die Karte aufgelegt werden kann. Jeder Ort der Erde bedürfte eines solchen Transparents, da jedem Horizont ein anderes Kreissystem entspricht. Wenn wir aber auf dem Transparent ein konzentrisches Kreissystem auftragen, so können wir für einen bestimmten Ort denjenigen Kreis auswählen, dessen Radius die Grösse seines Horizontalkreises hat. Da sich nach obigen Formeln ausserdem immer die Lage des Mittelpunktes berechnen lässt, so ist im wesentlichen das Problem gelöst.

Es fragt sich nur, ob ein ähnliches Verfahren nicht auch für die stereorgraphische Aequatorialprojektion verwendbar ist. Man erkennt leicht, dass bei dieser Projektionsart die Meridiane nicht als gerade Linien, sondern selbst als Kreise abgebildet werden, und eine Verschiebung in obigem Sinne unmöglich ist.

Auch die stereographische Horizontalprojektion ist für unsern Zweck wertlos, da sie nur für einen einzigen Ort den Himmel darstellt.

Es lässt sich nicht annehmen, dass Gauss bei Erwähnung der stereographischen Projektion die Anwendung eines Transparents im Auge gehabt haben soll. Vielleicht hat er das Einzeichnen der excentrischen Kreise andeuten wollen; einen Anhaltspunkt dafür bietet der in Zachs Monatsschrift für 1809 (S. 423) von Mollweide verfasste Artikel, in dem er aus der Zeichnung die zur Reduktion der Beobachtungen nötigen Formeln ableitet.

Da zur Anwendung der Gauss'schen Methode die Bedingung innegehalten werden muss, dass die Differenzen der Azimuthe der drei Sterne möglichst gleich 120° werden, so bleibt noch zu untersuchen übrig, auf welche Weise man nach der stereographischen Projektion das Azimuth eines Sternes findet. Die Vertikalkreise eines jeden Ortes werden durch Kreise dargestellt, die sämtlich durch das betreffende Zenith gehen — nur an den Polen sind es gerade Linien, da hier die Vertikalkreise und die Meridiane zusammenfallen. Das Zenith wird gefunden, indem man in Formel 4 dieses Paragraphen setzt $h = 90^0$, und $K_m P = 2 R \operatorname{tg} \left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$ (Tafel hierfür s. zum Schluss) auf der jeweiligen Sternzeitlinie vom Pol aus abträgt. Der dem Zenith diametral gegenüberliegende Punkt der Himmelskugel wird in einer Entfernung vom Pol liegen, welche aus obiger Formel hervorgeht, wenn $-\varphi$ statt $+\varphi$ gesetzt wird. Man würde sich nun leicht in der Projektion den Kreis gelegt denken können, der durch das Zenith, das Nadir und den betreffenden Stern geht; die für die drei Sterne auf diese Weise erhaltenen Kreise werden am Zenithpunkt jene Winkel bilden, auf die es ankommt, und die sich ungefähr

werden schätzen lassen. In manchen Fällen wird auch der Anblick der Sterne am Himmel schon ein geeignetes Kriterium bieten. Am sichersten aber verfährt man auf folgende Weise: Für den betreffenden Ort zeichnet man sich auf ein Stück Transparentpapier eine Strecke gleich der Distanz Zenith—Nadir, welche Grösse gleich $2\,R\left(\mathrm{tg}\left(45+\frac{\varphi}{2}\right)+\mathrm{tg}\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)\right)=4\ R\sec\varphi$ ist, errichtet in ihr die Mittelsenkrechte, die nun die Mittelpunkte sämtlicher Vertikalkreise enthält. Ausserdem ziehe man als Hülfslinien Strahlen vom Zenith aus unter Winkeln etwa von 30 zu 30 Grad zu der Strecke geneigt. Die Senkrechten zu diesen Strahlen schneiden die Mittelsenkrechte in den Mittelpunkten der zugehörigen Vertikalkreise, welche mit dem Meridian Winkel von 30°, 60° etc. einschliessen.

Wenn man nun die Kreise wirklich auszieht und auf ihre Peripherieen die Zahlen der Winkel schreibt, so wird man die so entstandene Zeichnung auf die Projektion so auflegen müssen, dass die Linie Zenith—Nadir dieses Transparents in die jeweilige Sternzeitlinie fällt, und zwar derart, dass das Zenith des Ortes in der Projektion sich mit dem Zenithpunkt in dem Transparent deckt. Die verschiedenen Kreise des Transparents stellen nun für den betreffenden Ort ein System von Vertikalkreisen dar und geben durch die beigeschriebenen Zahlen direkt das Azimuth an, welches ein in der Projektion liegender Stern hat. Ein solches Transparent muss der Reisende sich für seine Beobachtungsart herstellen, wobei er von der folgenden Tafel Gebrauch machen kann, die in derselben Einheit, die der Karte zugrunde liegt (R = 4 cm), ausgedrückt ist.

φ	Zenith—Nadir
0°	16.00 cm
5	16.06 „
10	16.24 „
15	16.57 „
20	17.03 „
25	17.65 „
30	18.48 „
35	19.53 „
40	20.88 „
45	22.63 „
50	24.89 „
55	27.89 „
60	32.00 „
65	37.86 „
70	46.78 „

Für die Breite von Strassburg ist ein Netz beigegeben, das nach dem oben Gesagten wohl keiner weiteren Erklärung bedarf.

§ 15.

Wir gehen dazu über, unsere beiden Himmelskarten zu erläutern. Die eine stellt den nördlichen Himmel vollständig und den südlichen bis — 45° dar, während die andere den südlichen ganz und den nördlichen zur Hälfte darstellt. Als Länge des Radius der zugrunde gelegten Kugel wurde 4 cm gewählt, damit die Karten einerseits nicht zu gross würden, andererseits selbst für Sterne mit hoher Deklination eine Verschiebung um einige Minuten sich noch kenntlich machte. Die Parallelkreise sind nicht gezogen worden, damit beim Anlegen des Transparents die Uebersicht nicht gestört wird; ihre Radien haben folgende Länge:

δ	ρ
90°	0.0 cm
80	0.70 „
70	1.41 „
60	2.14 „
50	2.92 „
40	3.72 „
30	4.62 „
20	5.60 „
10	6.72 „
0	8.00 „
—10	9.52 „
—20	11.42 „
—30	13.86 „
—40	17.16 „
—45	19.31 „

Die Stundenkreise sind nur für 0^h, 6^h, 12^h, 18^h ausgezogen worden; die übrigen sind mit ihren Unterabteilungen von 5 zu 5 Minuten durch Striche resp. Punkte an dem äussersten Kreise kenntlich gemacht.

Die Sterne wurden in der Weise eingetragen, dass nach der Formel $\varrho = 2\,R\,\mathrm{tg}\left(45 - \frac{\delta}{2}\right)$ ihr Abstand vom Pole berechnet wurde. Es sind sämtliche Sterne eingezeichnet worden, die im Berliner Jahrbuch und in der connaissance des temps heller als 3.1 angegeben sind; für die südlichen Sterne wurden ausserdem der Katalog von Houzeau und der nautical almanac benutzt, und alle in beiden Verzeichnissen bis zur Grösse 2.3 incl. bezeichneten Sterne wurden eingetragen und zwar nach ihrem mittleren Ort für 1900.0. Da die Karten hauptsächlich für Reisende bestimmt sind, von denen man nicht voraussetzen kann, dass sie im Besitze stark vergrössernder Fernrohre sind, wurde es für praktischer gehalten, von den Sternen der dritten Grösse und darunter abzusehen. Nur in den Teilen der Karte, welche fast gar keine Sterne enthielten, wurden ausnahmsweise auch solche von der Grösse 3.0, 3.1, 3.2 eingetragen, ihre Helligkeit aber nicht besonders markiert. Es sind dies ι urs. maj., ε leonis mit nördlicher und η eridani, γ eridani, ι navis, δ corvi mit südlicher Deklination. Bei

denjenigen Sternbildern, in welchen die einzelnen Sterne ziemlich nahe an einander geraten, wie orion, corvus etc., wurde es für ratsam erachtet, sämtliche Sterne aufzunehmen, damit man, falls der eine wegen zufällig eingetretener Hindernisse nicht beobachtet worden ist, sogleich Ersatz finden kann. Weggelassen wurden jedoch die folgenden (unter 2.5ter Grösse): ι. aurig., θ aurig., π und $\varkappa$ argus, γ virg., δ ophiuchi, χ scorp., γ, δ, ζ sagitt. und γ aquilae.

Die Sterne wurden nicht mit Namen und Buchstaben bezeichnet, um nicht unnötigerweise zu verwirren; sie wurden vielmehr mit fortlaufenden Nummern benannt, deren Erklärung beigegeben ist. Eine Zusammenstellung der Sterne folgt ausserdem zum Schluss; es sind im ganzen 62 Sterne mit nördlicher, 56 mit südlicher Deklination, und zwar enthält die Karte des nördlichen Himmels 99, die des südlichen ebenfalls 99 Sterne.

Das Transparent besteht aus konzentrischen Kreisen im Abstand von 0.5 cm. Von denselben sind zur klaren Uebersicht je zwei fein, der dritte etwas dicker ausgezogen. Als Farbe wurde für Karte und Transparent schwarz gewählt, da es sich zeigte, dass sie bei künstlicher Beleuchtung am besten hervortritt.

Nach Angabe der Formeln (3) und (4) des § 14 sind die Radien r der Horizontalkreise und der ihnen parallelen Höhenkreise und die Entfernungen m ihrer Mittelpunkte vom Pole in die am Schluss folgende Tafel V gebracht, deren Argumente φ und h geographische Breite und Höhe über dem Horizont sind.

Die Tabelle liefert, wie ersichtlich, die Grösse r für das Horizontalargument: geographische Breite und das Vertikalargument: Höhe über dem Horizont, während man m erhält, wenn man mit dem Horizontalargument: Höhe über dem Horizont und dem Vertikalargument: geographische Breite in die Tafel eingeht.

§ 16.

Die Auffindung von drei Sternen in gleicher Höhe wird unter der Voraussetzung, dass man eine genäherte Kenntnis der Zeit und der Breite hat, nach folgender Anweisung zu geschehen haben: **Man sucht den der betreffenden Sternzeit entsprechenden Meridian oder denkt ihn sich gezogen und bringt mit ihm den Durchmesser des Transparents zur Deckung. Nach Entnahme der Werte r und m aus der Tabelle mit den Argumenten φ = Polhöhe des Orts und h = 0° schiebt man das Transparent, bis der Kreis mit dem Radius m durch den Pol der Karte geht, aber so, dass sein Mittelpunkt auf der betreffenden Sternzeitlinie liegt. Der Kreis mit dem Radius r stellt den Horizont des Ortes dar. Hierauf entnimmt man die Grössen m und r für dasselbe φ aber h = 10°, 20° u. s. w. bis h = 90° und verschiebt der Reihe nach das Transparent so, dass die jedesmaligen Kreise mit dem Radius m den Pol in der Peripherie haben, indem man zugleich die Kreise mit den zugehörigen r überblickt.** Die Grösse der Verschiebung nimmt mit der Breite des Ortes ab, für den Pol wäre sie gleich 0, da für ihn die Parallelkreise zugleich die Almukantarathe darstellen. Ebenso wachsen die r von $\varphi = 90°$ bis $\varphi = 0°$.

Das Vorhandensein von drei Sternen auf einem r Kreise zeigt an, dass dieselben die gleiche und zwar die dem r entsprechende Höhe haben. Die Verschiebung auf der Sternzeitlinie von oben nach unten oder umgekehrt wird im allgemeinen nicht ausreichen, um drei Sterne aufzufinden. Meistens werden dieselben sich in der Nähe eines solchen r Kreises befinden, und es handelt sich darum, zu wissen, in welcher Zeit sie an die Peripherie des Kreises herankommen. Dazu hat man nur nötig, die Zeit zu schätzen, da man sieht, wie die Sterne sich bewegen, oder man dreht das Transparent um den Pol der Karte, bis der Stern auf dem Kreise liegt, und erkennt dann, welche Sternzeitlinie mit dem Durchmesser des Transparents zusammenfällt.

Einzelne besondere Fälle mögen im folgenden näher auseinandergesetzt werden. Wenn für nördliche Breiten der Polarstern einer der drei Sterne ist, so wird sich aus der Karte die Zeit nicht bestimmen lassen, wann er eine gewisse Höhe erreicht, da infolge der Drehung des Transparents um den Pol die ihm sehr nahen Sterne einen grossen Spielraum in der Schätzung der Zeit lassen. Es wird sich daher empfehlen, zunächst die ungefähr statthabende Höhe des Polarsterns aus Tafeln zu bestimmen und dann vermittelst der Zeichnung die Zeit anzugeben, wann die beiden andern Sterne dieselbe Höhe haben. Zum Schluss folgt eine Tafel VI, aus welcher die jedem Stundenwinkel entsprechende Korrektion entnommen werden kann, die zu der Polhöhe addiert werden muss, um die wahre Höhe zu erhalten.

Was für den Polarstern gesagt ist, gilt teilweise auch für Sterne, die sich in der Nähe des Meridians befinden. Für diese wird man wegen ihrer langsamen Bewegung in Höhe nur eine genäherte Zeit aus der Karte finden. Man wird daher zunächst die genäherte Zenithdistanz des kulminierenden Sterns durch die Gleichungen

$$z = \pm \varphi \mp \delta \text{ für obere}$$
$$= 180 - (\varphi + \delta) \text{ für untere}$$

Kulmination bestimmen und dann aus der Zeichnung die Momente zur Einstellung für die beiden andern Sterne ersehen. Man wird es in der Praxis aber stets so einrichten müssen, dass der Polar- resp. der in der Kulmination befindliche Stern zuerst beobachtet wird, weil kleine Aenderungen in der Zeit ihrer Einstellungen nur von geringem Einflusse auf die Beobachtungszeit der beiden andern Sterne sind. Grosse Dienste wird hierbei die zum Schlusse beigefügte Tafel VII leisten, welche die Höhenänderung eines Sternes als Funktion der Aenderung der Zeit darstellt; man kann aus ihr ersehen, um wieviel man die Beobachtungszeit eines Sternes abändern muss, falls man die aus der Karte sich ergebende Höhe etwas variiert hat. Ausserdem sind zwei Tafeln VIII und IX beigefügt, welche die Abhängigkeit der Aenderung der Zeit von derjenigen in der Höhe und in der Polhöhe erkennen lassen. Man wird von beiden dann Anwendung machen, wenn man wissen will, wie sich die Beobachtungszeit eines Sternes ändert, wenn man eine andere Polhöhe anwendet, und um wieviel Bogenminuten die Höhen ab- oder zugenommen haben, wenn man die aus der Karte abgelesene Zeit nicht genau innegehalten hat.

Wie bereits erwähnt, stellen unsere beiden Karten den Himmelsglobus bis zur Deklination $\mp 45^0$ dar. Es ist klar, dass die nördliche Karte den Horizont nur für diejenigen Orte enthalten kann, deren Breite 45^0 und darüber beträgt; ebenso wird man in die südliche Karte nur für solche Orte den ganzen Horizontalkreis einzeichnen können, deren südliche Polhöhe absolut nicht unter 45^0 liegt. Für einen Aequatorort wird der Horizont durch eine gerade Linie dargestellt, nämlich den über beide Karten sich erstreckenden Meridian, welcher von der jeweiligen Sternzeitlinie um $\pm 6^h$ absteht, während die Höhenkreise Kreise werden, für welche die Konstanten m und r auf beiden Karten dieselben sind und aus der oben erwähnten Tabelle entnommen werden können.

Der Horizont eines Ortes, dessen Polhöhe zwischen $+ 45^0$ und $- 45^0$ gelegen ist, wird durch einen Kreis dargestellt, der in der Projektion sich über beide Karten erstrecken wird — ähnlich den Höhenkreisen für einen Aequatorort —, doch werden hier m und r für beide Karten nicht dieselben Werte haben. Für diejenige Karte nämlich, welche den sichtbaren Pol des betreffenden Ortes enthält, ist die bereits mitgeteilte Tabelle massgebend; für die andere Karte aber sind m und r nach den Formeln (3) und (4) des § 14 zu berechnen, wobei zu beachten ist, dass die Polhöhe mit entgegengesetztem Zeichen einzuführen ist. Für die Höhenkreise werden auch so lange beide Karten anzuwenden sein, als $h < 45^0 - \varphi$, wobei φ den absoluten Wert der Polhöhe bezeichnet. Ist h aber gleich oder grösser als dieser Wert, so werden die Projektionen der Höhenkreise vollständig in die nördliche resp. südliche Himmelskarte fallen.

Die hier folgenden Tafeln geben die Grössen m und r für $h = 0^0$ bis $h = 45^0$ und für $\varphi = \pm 5^0$ bis $\varphi = \pm 45^0$; das negative Zeichen der Tafelwerte bedeutet, dass das Auflegen des Transparentdurchmessers auf die Karte derart zu geschehen hat, dass die Grössen m und r vom Pol aus auf derjenigen Sternzeitlinie abzutragen sind, welche von der der wirklichen Zeit entsprechenden um 12 Stunden abliegt.

Tafelwert: r.

Horizontalargument: Polhöhe.

Vertikalargument: Höhe über dem Horizont.

h \ φ	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0°	−91.76	−46.04	−30.92	−23.40	−18.92	−16.00	−13.96	−12.44	−11.31
5	∞	−92.12	−46.44	−31.28	−23.76	−19.32	−16.36	−14.32	.
10	+91.08	∞	−92.48	−46.80	−31.68	−24.12	−19.68	.	.
15	+45.00	+90.72	∞	−92.88	−47.16	−32.04	.	.	.
20	+29.52	+44.64	+90.32	∞	−93.24	.	.	.	.
25	+21.60	+29.12	+44.28	+89.96	.	.	.	.	.
30	+16.76	+21.24	+28.76	.	.	.	.	.	.
35	+13.48	+16.40	.	.	.	.	.	.	.
40	+11.04	.	.	.	.	.	.	.	.
45	+ 9.12	.	.	.	.	.	.	.	.

Tafelwert: m.
Horizontalargument: Polhöhe.
Vertikalargument: Höhe über dem Horizont.

h \ φ	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0°	−91.44	−45.40	−29.88	−21.96	−17.16	−13.84	−11.40	−9.56	− 8.00
5	∞	−91.08	−45.00	−29.52	−21.60	−16.76	− 13.48	−11.04	.
10	+92.12	∞	−90.72	− 44.64	−29.12	−21.24	−16.40	.	.
15	+46.44	+92.48	∞	−90.32	−44.28	− 28.76	.	.	.
20	+31.28	+46.80	+92.88	∞	−89.96	.	.	.	.
25	+23.76	+31.68	+47.16	+93.24	.	.	.	.	.
30	+19.32	+24.12	+32.04	.	.	.	.	.	.
35	+16.36	+19.68	.	.	.	.	.	.	.
40	+14.32	.	.	.	.	.	.	.	.
45	+12.89	.	.	.	.	.	.	.	.

Beide Tafeln gelten somit für $\frac{\text{südliche}}{\text{nördliche}}$ Breiten auf der $\frac{\text{nördlichen}}{\text{südlichen}}$ Karte.

Für einen Ort von der Polhöhe −30° z. B. würde man also mit der südlichen Karte allein ausreichen, wenn man von 15° Höhe und darüber beobachten will. Sucht man aber Sterne unter 15° Höhe, z. B. von 10°, so hätte man das Transparent mit den Grössen r = 11.7 m = 10.3 an die südliche und mit r = — 24.12, m = — 21.24 an die nördliche Karte anzulegen. Da das beigegebene Transparent bloss solche Kreise enthält, deren Radius höchstens 14.5 cm. beträgt, so wird es gar nicht angehen, die Karten in allen den Fällen zu benutzen, wo man auf beide angewiesen ist. Für die Praxis wird dies im allgemeinen von keiner Bedeutung sein, da man wohl immer in der Höhe, welche von einer einzigen Karte Gebrauch zu machen gestattet, drei Sterne wird finden können.

§ 17.

Die Aufsuchung dreier gleich hohen Sterne nach dem beschriebenen Verfahren wird einigen Unsicherheiten unterworfen sein. Die Ursachen derselben liegen in drei Quellen: 1) in der unvermeidlichen fehlerhaften Eintragung der Sterne, 2) in dem falschen Auflegen des Transparents, 3) darin, dass infolge unrichtiger Annahme von φ auch die Werte m und r von den wirklichen abweichen werden.

Die gemeinsame Wirkung dieser drei Fehler ist eine Funktion der Polhöhe, der Höhe über dem Horizont, der Deklination des betreffenden Sterns und seines Stundenwinkels. Es wäre wohl zwecklos, einzelne besondere Fälle herauszugreifen und unter bestimmter Annahme der Fehler ihren Einfluss berechnen zu wollen. Uebrigens würde es leicht sein, die Grenzen von $d\,\theta$ zu finden, d. h. um wieviel die Zeit aus der Karte im Maximum sich falsch ergeben wird.

Was erstens das falsche Eintragen der Sterne betrifft, so denken wir uns, der Stern α, δ, habe in der Karte die Koordinaten $\alpha + d\delta$, $\delta + d\delta$. Die sich ergebende Zeit, wann er eine gewisse Höhe erreicht, wird daher sein $\Theta + d\Theta$, wobei

$$d\Theta = dt + d\alpha$$

$$dt = \left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin t} - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg} t}\right)\frac{d\delta}{15}$$

Ist man zweitens in der Polhöhe um die Anzahl $d\varphi$ in Bogenminuten im Ungewissen, so wird $d\Theta$ auch noch abhängig sein von $d\varphi$ und daher zu setzen sein

$$d\Theta = \frac{-1}{\cos\varphi \operatorname{tg} a}\frac{d\varphi}{15} + \left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin t} - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg} t}\right)\frac{d\delta}{15} + d\alpha.$$

Das falsche Anlegen des Transparents wird drittens zur Folge haben, dass die Grössen m und r der Tafel, welche für die Polhöhe φ des Orts einer gewissen Höhe entsprechen um dm und dr falsch angenommen worden sind. Unter der Voraussetzung, dass dm und dr in derselben Richtung wirken und zwar in der Linie Pol-Stern (genau genommen gilt dies ja nur für den Meridian) wird die hierdurch entstehende Aenderung auf die Poldistanz des Sterns geworfen werden können und sich berechnen lassen durch die aus der Formel $\varrho = 2\,R\,\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\delta}{2}\right)$ gebildete Differentialformel

$$d\delta = \frac{-d\varrho\cos^2\left(45 - \frac{\delta}{2}\right)}{R \sin 1'}.$$

Man wird den so gefundenen Betrag in $d\delta$ mit dem obigen vereinigen und die für $d\Theta$ oben aufgestellte Formel beibehalten können.

Bei der verhältnismässig geringen Dimension der Sternkarten werden beim Anlegen des Transparents gemachte Fehler schon von erheblichem Belang werden können und meistens die aus den beiden andern Umständen folgende Unsicherheit in der Bestimmung der Zeit übertreffen. Es wird daher bei dem Auflegen und Verschieben des Transparents grosse Sorgfalt anzuraten sein. Wenn man von Meridiansternen (vergl. S. 50) und von solchen mit sehr hoher Deklination absieht, so werden die Zeiten der gleichen Höhe für die drei Sterne im grossen und ganzen selten mehr als um 5 Minuten sich falsch ergeben, und dies wird für die Beobachtung von keiner grossen Bedeutung sein. Uebrigens wäre es ja eine sehr geringe Mehrarbeit, sich mit Benutzung der S. 41b gegebenen Formeln die genauen Werte zu verschaffen.

Um aber wenigstens eine Vorstellung zu geben von der Grösse $d\Theta$, wurde für $\varphi = 45^0$, $z = 45^0$ ein Beispiel durchgerechnet unter der Annahme, dass $dm + dr = 0.1$ cm ist. Es ergab sich, falls der eine Stern im Südmeridian sich befindet, für die beiden andern Sterne ($a = \pm 120^0$): $d\Theta = \pm 4^m.3$, und wenn der erstere im Nordmeridian, die beiden andern also im Azimuth $a = \pm 60^0$ stehen: $d\Theta = \pm 3^m.4$.

Soweit ein graphisches Verfahren überhaupt Anspruch auf Genauigkeit erheben kann, wird es also bei dieser Projektionsmethode der Fall sein.

Es erübrigt noch, zu untersuchen, welchen Einfluss die Präzession auf die Zeichnung hat. Die jährliche Aenderung in der geraden Aufsteigung der Gestirne wird durch die Formel ausgedrückt

$$\Delta\ \alpha = 46.''08 + 20.''05\ \sin\ \alpha\ \mathrm{tg}\ \delta.$$

Wir begnügen uns hier mit dem ersten Gliede rechter Hand und setzen $\Delta\ \alpha = 3^s$. Das zweite Glied kann allerdings für polnahe Sterne ziemlich beträchtlich werden; für diese aber bleibt die Aenderung in der Rektascension für die Eintragung ohne Wirkung. Für Sterne, deren $\delta = \pm 80^0$ ist, kommt eine Zeitminute erst der räumlichen Ausdehnung von 0.03 mm gleich; für die übrigen Sterne wird die Fortrückung des Frühlingspunktes um 3^s eine Verschiebung derselben in der Richtung der Zählung der Rektascension zur Folge haben. In 20 Jahren erst werden also die Sterne eine Minute früher oder später die aus der Karte ersichtliche Höhe erreichen; dies ist aber belanglos, weil selbst im günstigsten Falle die Zeit der Einstellung nur auf einige Minuten genau angegeben werden kann. Uebrigens könnte man sich das System der Sternzeitlinien durch Drehung des Netzes um den Pol der Ekliptik für jede Zeit richtig legen. Der Einfluss der Präzession auf die Deklination der Sterne

$$\Delta\ \delta = 20''.05\ \cos\ \alpha$$

ist zu gering, um hier berücksichtigt werden zu müssen.

§ 18.

Einige Beispiele mögen erläutern, was in den letzten Paragraphen auseinandergesetzt worden ist.

An einem Orte, dessen genäherte Breite $\varphi = + 48^0\ 30'$ ist, sollen gegen Mitte des Monats März kurz nach Ende der Abenddämmerung eine geographische Ortsbestimmung vorgenommen, und die hierfür geeigneten Sterne angegeben werden, sowie die Zeit ihrer Beobachtung.

Im März weicht die Sternzeit nur wenig von der mittleren Ortszeit ab, und die Dämmerung endet ungefähr um $7^h\ 30^m$. Wir schreiben zunächst die aus der Tabelle für $+ 48^0\ 30'$ interpolierten Werte von r und m hin; sie lauten

h	m	r
25°	4.5	6.2
30°	4.3	5.5
35°	4.0	4.9
40°	3.8	4.4
45°	3.6	3.8
50°	3.5	3.4
55°	3.4	2.9
60°	3.3	2.5
65°	3.2	2.0
70°	3.1	1.6

Die für h unter 25° und über 70° gültigen Werte lassen wir fort, da die Beobachtungen sich nur auf Höhen innerhalb jener Grenzen erstrecken sollen. Die Verschiebung der Mittelpunkte wird also nur 1.4 cm. betragen, während die Radien der Transparentkreise zwischen 6.2 und 1.6 cm. liegen. Das Transparent wird nun in der Art auf die Karte gelegt, dass sein Durchmesser in die Sternzeitlinie $7^h\ 30^m$ fällt und auf dieser Linie so lange verrückt, bis der untere Rand des Transparentkreises 4.5 durch den Pol der Karte geht. Nun suchen wir auf dem Transparentkreise 6.2, ob sich auf ihm oder in seiner Nähe drei Sterne durchblicken lassen. Ist dies nicht der Fall, so wird das Transparent langsam weiter geschoben, bis der Kreis 4.3 durch den Pol geht, während gleichzeitig die zwischen 6.2 und 5.5 liegenden Kreise überblickt werden. Auf dieselbe Weise fährt man fort, bis man 3 geeignete Sterne auf nahe demselben Kreise findet. Man sieht auf dem der Höhe von 35° entsprechenden Kreise die beiden Sterne γ andromedae und δ orionis und nicht weit ab von der Peripherie γ cassiopeiae. Doch sind diese drei Sterne nicht für die Beobachtung zu verwenden, da sie zu kleine azimuthale Winkel mit einander bilden. Wir verrücken das Transparent noch mehr nach dem Pole zu und bemerken bald, dass das Sterntripel

β ursae minoris, γ orionis, α leonis

innerhalb kurzer Zeit auf den Kreis 4,4 zu liegen kommt. Wir drehen nun das Transparent um den Pol, indem wir es auf diesem Punkt mit dem Finger festhalten, und sehen nun, welche Sternzeitlinie mit dem Durchmesser des Transparents zusammenfällt, wenn diese Sterne in dem Umfang des Kreises 4.4 ($h = 40^0$) enthalten sind. Wir schätzen der Reihe nach folgende Augenblicke:

β urs. min.	γ orion.	α leon.
$7^h\ 10^m$ bis 20^m	$7^h\ 28^m$ bis 32^m	$7^h\ 10^m$ bis 15^m.

Die Rechnung würde ergeben haben:

$7^h\ 13^m$	$7^h\ 29^m$	$7^h\ 12^m$.

Die Sterne erfüllen zugleich die Forderung, dass sie am Zenith, welches auf dem Parallelkreise $+ 48^0\ 30'$ liegen würde, ziemlich gleich grosse Winkel bilden. Wir erkennen auch, dass β urs. min. und α leonis östliche Stundenwinkel haben, während γ orionis westlich vom Meridian liegt.

Die Beobachtungen werden also derart einzurichten sein, dass man zuerst α leonis beobachtet, hierauf das Fernrohr im Azimuth dreht und wartet, bis β urs. min. den oder dieselben Fäden passiert und eine Viertelstunde später γ orionis durch das Gesichtsfeld geht. Wenn wie hier die Beobachtungen sich zum Teil in so kurzer Zeit folgen, so wird es ratsam sein, die Zwischenzeiten zu variieren, indem man die östlichen Sterne etwas früher, die westlichen etwas später beobachtet als zu der aus der Karte folgenden Zeit und hierzu die in § 16 erwähnten Tafeln benutzt. Nur in dem Falle, dass zwei Sterne auf derselben Seite des Meridians im Azimuth sich zu $\pm 180^0$ ergänzen, so dass ihre Höhenänderung in demselben

Intervall die gleiche ist, wird man für geringe Differenzen zwischen den Zeiten der gleichen Höhe die Beobachtung des betreffenden Sterntripels für ungeeignet halten müssen.

Für die Breite $+48^0\,30'$ ist der Polarstern ein sehr passendes Objekt zur Anwendung der Gauss'schen Methode, und es soll an einem Beispiel gezeigt werden, wie man zwei mit ihm gleich hohe Sterne findet. Um die gegebene Sternzeit $7^h\,30^m$ ist, wie aus Tafel V ersichtlich, die Höhe des Polarsterns nahezu gleich der Polhöhe. Wir suchen deshalb für $h = 48^0\,30'$ die Werte von m und r und finden $m = 3.5$ $r = 3.5$.

Wir legen das Transparent so an, dass der Kreis 3.5 durch den Pol geht, dann wird er zugleich den Polarstern enthalten, aber, wie die Karte zeigt, keine passenden Sterne ausser ihm. Wir drehen deshalb das Transparent in der Zeit etwas weiter und nehmen bald wahr, dass 1) α leonis und 2) β tauri nicht viel später jenen Kreis treffen. Durch genaues Auflegen des Transparents wird die Zeit erhalten und zwar gibt uns die Karte die Werte

1) $8^h\,20^m$ bis 25^m 2) $8^h\,30^m$ bis 33^m,

während die Rechnung liefert

$8^h\,23^m$ $8^h\,31^m$.

Die Azimuthe würde man durch Auflegen des Transparents II ungefähr wie folgt schätzen:

1) -35^0 2) $+75^0$;

man findet durch Rechnung

$-38^0\,32'$ $+71^0\,45'$.

Für die Beobachtung wird es sich empfehlen, den Polarstern statt $7^h\,30^m$ erst gegen $8^h\,15^m$ einzustellen, um die Zwischenzeiten zu verkleinern. Die dadurch entstehende Höhenänderung von $-13'$ nach Tafel V wird man für die beiden andern Sterne berücksichtigen müssen. Nach Tafel IV wird für α leonis $dt = -2^m.5$ und für β tauri $dt = +1^m.5$. Die definitiven Angaben zur Beobachtung der drei Sterne werden daher lauten:

α urs. min.	α leonis	β tauri
$8^h\,15^m$	$8^h\,20^m.5$	$8^h\,32^m.5$.

Zum Schluss sei noch ein Beispiel für einen Aequatorort gegeben. Es wird verlangt, zu der genäherten Sternzeit 18^h eine Beobachtungsreihe nach der Gauss'schen Methode zu machen und die Zeiten zur Einstellung dreier passenden Sterne vorher zu bestimmen an einem Orte, dessen Breite gleich 0^0 ist. Wir entnehmen die Werte für r und m aus der Tabelle und zwar zunächst von $h = 45^0$ bis $h = 70^0$.

h	m	r
45^0	11.3	8.0
50	10.5	6.7
55	9.8	5.6
60	9.2	4.6
65	8.8	3.7
70	8.5	2,9

Das Verfahren ist dasselbe wie vorher; auf dem der Höhe von 60^0 entsprechenden Kreise finden wir

σ sagittarii,	α aquilae,	α serpentis

und die Beobachtungszeiten

$17^h\,36^m$ bis 38^m $17^h\,48^m$ bis 50^m $17^h\,50^m$ bis 52^m,

während die Rechnung gibt

$17^h\,38^m$ $17^h\,50^m$ $17^h\,52^m$.

Will man z. B. schon in einer Höhe von 35^0 beobachten, so hätte man vermittelst der Werte

$$m = 14.0,\ r = 11.4$$

das Transparent in der gleichen Weise auf jede der beiden Karten aufzulegen, da die Kreise wegen ihrer Grösse über jede von ihnen hinausfallen. Man muss dann nach einander beide Teile des Kreises übersehen, wenn man Sterne in gleicher Höhe sucht. Für die Sternzeit 16^h z. B. würde sich auf diese Art ergeben haben ($\varphi = 0^0, h = 35^0$) für

	γ dracon.	σ sagittar.	δ corvi
nach der Karte	$16^h\,20^m$ bis 28^m	$15^h\,46^m$ bis 50^m	$15^h\,58^m$ bis 60^m
durch Rechnung	$16^h\,23^m$	$15^h\,47^m$	$15^h\,59^m$.

Die Azimuthe ergeben sich aus der Rechnung zu

$-\ 162^0\ 48'$ $-\ 57^0\ 10'$ $+\ 70^0\ 20'$.

Wenn man nicht bloss die auf dem Transparent gezeichneten Kreise benutzt, sondern auch Zwischenkreise, die man sozusagen interpolieren kann, so wird man es in der Hand haben, die Zwischenzeiten nach der Karte abzuändern und auf die beigegebenen Tafeln sogar verzichten können.

Falls die Sternkarten auch die Parallelkreise von 10^0 zu 10^0 enthalten würden, könnte man auch ohne Kenntnis der Werte m und r von dem Transparent Gebrauch machen. Aus der Figur in § 14 ist ersichtlich, dass der Horizont eines Ortes dargestellt wird durch einen Kreis, dessen Mittelpunkt in die Projektion der jeweiligen Sternzeitlinie fällt. Diejenigen Punkte dieser Linie, welche auf der Karte durch die positiven und negativen Komplemente der Breite gegeben sind, werden auf der Peripherie jenes Kreises liegen. Für einen Ort, dessen Polhöhe gleich $+\ \varphi$ ist, wird auf der nördlichen Sternkarte zur Zeit Θ ein Durchmesser des Horizontalkreises auf der Θ Linie durch die Punkte $\pm\ (90-\varphi)$ gegeben sein, und zwar so, dass der Endpunkt $-\ (90-\varphi)$ auf der Sternzeitlinie selbst jenseits des Aequators, der andere $+\ (90-\varphi)$ auf ihrer Verlängerung über den Pol hinaus, also auf der von der ersteren um 12 Stunden abliegenden Linie liegt. Die Höhenkreise desselben Orts werden, wie oben ausgeführt worden ist, excentrisch zu dem Horizontalkreise liegen. Für die Höhe h z. B. werden die Endpunkte des Durchmessers in die Punkte $+\ (90-\varphi+h)$ und $-\ (90-\varphi-h)$ fallen.

Man nehme also das Transparent, lege seinen Durchmesser auf die jeweilige Sternzeitlinie und suche denjenigen Kreis heraus, dessen Peripherie durch die für den Horizontalkreis bestimmten Punkte geht. Für die verschiedenen Höhenkreise denke man sich diese Punkte um dieselbe Anzahl von Graden an einander gerückt und wähle diejenigen Kreise des Transparents aus, welche durch die neuen Punkte gehen.

Das eben beschriebene Verfahren erfordert zwar viel weniger Hilfsmittel als das unsrige; es ist für jede nach stereographischer Polarprojektion gezeichnete Sternkarte zu verwerten — ein Transparent mit einem System von konzentrischen Kreisen wird man sich ja stets herstellen können. Es erheischt aber zu grosse Aufmerksamkeit von seiten des Beobachters und wird schnell ermüdend wirken. Die unter Anwendung der m und r Grössen auseinandergesetzte Methode dagegen ist mehr mechanischer Natur und wird rascher vor sich gehen, wird daher in der Praxis wohl immer der andern vorgezogen werden.

Schluss.

Sehr viel grössere Anforderungen als die Bestimmung der Breite stellt die Ermittelung der Länge an den Reisenden. Im allgemeinen auf sich allein als Beobachter angewiesen und nur selten in der Lage, die Orte, deren geographische Länge er bestimmen will, wiederholt zu besuchen, wird der Reisende in fremden Ländern zu dem Monde seine Zuflucht nehmen müssen und unter den Methoden, welche dieser Himmelskörper zur Bestimmung von Längenunterschieden darbietet, diejenigen auswählen, welche seinen Hilfsmitteln angepasst sind und zugleich mit der Einfachheit der Ausführung die relativ grösste Genauigkeit versprechen. Bekanntlich ändert der Mond in höheren Breiten, selbst einige Stunden vor und nach dem Meridiandurchgang, infolge seiner eigenen Bewegung und vornehmlich derjenigen in Rektascension sein Azimuth sehr schnell und seine Höhe sehr langsam; andrerseits ist in niedrigen Breiten, zumal in der Nähe des Äquators, wo die Richtung der täglichen Bewegung fast senkrecht auf dem Horizont steht, die Azimuthalveränderung gering, dagegen die Änderung der Höhe relativ sehr gross. Der Reisende wird daher in höheren Breiten die Länge seines Beobachtungsortes aus Mondazimuthen, in niederen Breiten aus Mondhöhen bestimmen müssen, während er in mittleren Breiten beide Methoden verwenden kann. In jedem Fall wird er aber die Beobachtungen so einzurichten haben, dass er von den Eigentümlichkeiten und Fehlern des Instruments thunlichst frei wird und zugleich in kurzer Zeit eine grössere Anzahl von Messungen erlangen kann. Was nun zunächst die Bestimmung der Länge oder, was auf dasselbe herauskommt, der Rektascension des Mondes aus Azimuthmessungen betrifft, so wird den letzten beiden Forderungen am besten dadurch genügt, dass um die Zeit des Meridiandurchganges des Mondes, d. h. von etwa einer Stunde vor der Kulmination bis eine Stunde nach derselben wiederholentlich die Zeiten des Durchgangs des Mondes und eines ihm in Deklination und in Rektascension benachbarten Sternes durch denselben Vertikalkreis beobachtet werden. Unter nicht zu ungünstigen Umständen wird es meist möglich sein, innerhalb dieser Zeit 2 oder 3 Durchgänge vor und ebensoviel nach der Kulmination zu erlangen. Je näher die beiden Objekte einander stehen, um so geringeren Einfluss erlangen die Fehler des Instruments; immerhin wird es aber gut sein, bei jedem Durchgang die Neigung der Horizontalachse zu bestimmen und ausserdem die

Beobachtungen symmetrisch auf die beiden Kreislagen (z. B. Kr. r. Kr. l. Kr. r. — Kr. l. Kr. r. Kr. l.) zu verteilen. Eine hinreichende Kenntnis des Kollimationsfehlers der optischen Achse wird man sich durch Einstellen eines langsam bewegten Sternes — oder eines terrestrischen Objektes, welches entfernt genug ist, um keine Änderung in der Okularstellung zu erfordern —, in beiden Kreislagen und Ablesen des Horizontalkreises verschaffen können; es bedarf kaum der Erwähnung, dass im ersteren Falle die Azimuthänderung in der Zwischenzeit in Rücksicht gezogen werden muss. Die symmetrische Anordnung der Beobachtungen auch hinsichtlich der Kulmination ist deshalb anzuraten, weil aus dem Mittel von je zwei derartigen Beobachtungen in derselben Weise, als wenn im Meridian selbst gemessen wäre, etwaige Fehler in der Breite, der Parallaxe des Mondes und in den Declinationen herausfallen, die Fehler in den beobachteten Durchgangszeiten und in den angenommenen Uhrständen aber mit demselben Faktor wie bei Meridiandurchgängen multipliziert erscheinen. Die Uhrkorrektion wird man — bei Anwendung der Gaussschen Methode zugleich mit der Breite — vor- oder nachher, am besten beide Male bestimmen. Hinsichtlich des zweckmässigsten Verfahrens der Reduktion muss hier auf die Lehrbücher, insbesondere auf Chauvenet I 240 verwiesen werden.

Für die Gegenden von geringer Breite, wo die Bestimmung der Rektascension des Mondes durch Höhenmessungen erfolgen muss, könnte man daran denken, dieselbe mit der Breiten- und Zeitmessung zu vereinigen, indem man den Durchgang nicht nur dreier Sterne, sondern auch des Mondrandes durch denselben Almukantarath beobachtet. Indessen wird die Aufsuchung von drei passenden Sternen, welche nahe um dieselbe Zeit mit dem Monde die gleiche Höhe erreichen, hier umsomehr erschwert, als ausser den Bedingungen für die Azimuthdifferenzen der Sterne die weitere Bedingung erscheint, dass der Mond sich in der Nähe des ersten Vertikals, oder wenigstens nicht zu weit davon befinden soll. Es wird daher schon aus diesem Grunde zweckmässiger sein, für die Bestimmung der Breite und des Uhrfehlers die Gausssche Methode beizubehalten, dagegen zur Bestimmung der Länge eine verwandte Methode anzuwenden, nämlich die Beobachtung der Zeiten, wann der Mond und ein in der Nähe seiner scheinbaren Bahn gelegener und in Rektascension benachbarter Stern dieselbe Höhe erreichen. F. Kaiser hat bereits i. J. 1851 in seiner Schrift: „de sterrekundige plaats bepaling in den Indischen Archipel“ diese Methode warm empfohlen und J. A. C. Oudemans hat im Astronomical journal Vol. IV. Nr. 93 die theoretische Entwickelung derselben gegeben, welche auch in dem Lehrbuch von Chauvenet reproduciert worden ist. Das Beobachtungsverfahren ist ganz dasjenige, welches man bei der Gaussschen Methode befolgt, nur wird man darauf zu sehen haben, die Genauigkeit nicht nur durch Beobachtung der Antrittszeiten an mehreren Fäden, sondern auch durch Wiederholung bei verschiedenen Höhen des Fernrohrs zu steigern. Auch empfiehlt es sich, an denjenigen Orten, wo der Reisende längeren Aufenthalt nimmt, die Beobachtungen zu beiden Seiten des Meridians anzustellen und auf beide Ränder des Mondes zu verteilen.

Neben diesen beiden Methoden, hinter welchen das Verfahren der Monddistanzen erheblich zurücksteht, kann dem Reisenden die Beobachtung etwaiger Bedeckungen von Sternen durch den Mond nicht dringend genug empfohlen werden. Nach den Untersuchungen von Auwers A. N. 2636 kann von einer einzelnen guten Beobachtung eines Eintritts oder eines Austritts am dunkeln Rande des Mondes im Durchschnitt, wenn dieselbe mit einem gut berichtigten Mondort verglichen wird, und der Sternort genau bekannt ist, eine Längenbestimmung vom mittleren Fehler $+ 2^s.5$ erwartet werden. Allerdings ist dieser Wert abgeleitet aus Beobachtungen, welche an festen Sternwarten von geübten Beobachtern erlangt worden sind, und es wäre, um ein annähernd gleiches Resultat zu erzielen, wünschenswert, dass der Reisende bei seiner Vorbereitung für astronomisch-geographische Ortsbestimmungen sich auch in derartigen Beobachtungen einübe.

Es würde dies um so dankbarer sein, als die Beobachtung des Eintritts eines Sternes am dunklen Mondrand, worauf der Reisende sich meist wird beschränken müssen, keine rechnende Vorbereitung verlangt und mit einem Fernrohr von nur einigen Centimetern Öffnung, wie der Reisende es häufig mitzunehmen pflegt, ausgeführt werden kann, namentlich, wenn die Phasen kurz nach Neumond, wo die beleuchtete Mondsichel der Sichtbarkeit der Sterne noch keinen Abbruch thut, berücksichtigt werden. Um vor einer Verwechslung des bedeckten Sternes sicher zu sein, würde eine Schätzung seiner Helligkeit und die Angabe des Orts des Mondrandes, wo er verschwand, bei ganz unbekannter Länge auch eine genäherte Bestimmung des Azimuths und der Höhe des Mondrandes ausreichen. Eine derartige Beobachtung einer Sternbedeckung verbunden mit einer guten Zeit- und Breitenbestimmung würde die Länge genauer ergeben, als sie nach den andern Methoden aus mehrtägigen Beobachtungen erzielt werden kann.

Endlich mag hier noch darauf hingewiesen werden, dass auch das Verfahren der Zeitübertragung gegenüber und neben den übrigen Methoden der Längenbestimmung volle Beachtung verdient, und dies umsomehr, als der Reisende bei der heutzutage hochentwickelten Uhrenindustrie leicht in der Lage sein wird, mit mehreren guten und widerstandsfähigen zeitmessenden Apparaten, unter denen im allgemeinen den Ankeruhren der Vorzug zu geben sein wird, sich zu versehen. Ohne hier auf Einzelheiten einzugehen, mag nur bemerkt werden, dass es ein Haupterfordernis für den Erfolg dieser Methode ist, dass einerseits der relative Stand der Uhren zu einander täglich ermittelt wird, und dass andrerseits ihr absoluter Gang an allen Stationen, wo dies möglich ist, durch sorgfältige Zeitbestimmungen festgestellt wird; auch ist es dringend notwendig, die Uhren stets, soweit es thunlich ist, unter denselben Bedingungen zu halten.

Tafel I.
Zu Seite 24.

Tafel zur Entnahme des ersten und des zweiten Differentialquotienten $\frac{dt}{dh}$ und $\frac{d^2t}{dh^2}$.

Tafelwert: $\frac{dt}{dh}$ $\pm$ { wenn a $\mp$

$\pm\varphi$ \ a	15°	30°	45°	60°	90°
0°	3.86	2.00	1.41	1.15	1.00
15°	4.00	2.07	1.46	1.20	1.04
30°	4.46	2.31	1.63	1.33	1.15
45°	5.46	2.83	2.00	1.63	1.41
60°	7.73	4.00	2.83	2.31	2.00

Tafelwert: $\frac{d^2t}{dh^2}$ $\pm$ { wenn a $\mp$ für I, II, III.

I $\varphi = +60°$

h \ a	15°	30°	45°	60°	90°
15°	211.0	27.22	7.68	2.49	0
30°	255.0	30.93	8.56	2.69	0
45°	300.3	36.00	9.75	2.98	0
60°	379.3	44.79	11.83	3.46	0

II $\varphi = +30°$

h \ a	15°	30°	45°	60°	90°
15°	53.80	6.48	1.77	0.63	0
30°	73.00	8.62	2.28	0.77	0
45°	99.30	11.16	2.96	0.96	0
60°	144.8	16.62	4.16	1.28	0

III $\varphi = 0°$

h \ a	15°	30°	45°	60°	90°
15°	14.42	1.60	0.38	0.10	0
30°	31.06	3.44	0.82	0.22	0
45°	53.80	6.00	1.41	0.39	0
60°	93.20	10.40	2.45	0.66	0

IV $\varphi = -30°$

h \ a	15°	30°	45°	60°	90°
15°	−20.50	−2.76	−0.90	−0.39	0
30°	−13.05	−0.62	−0.39	−0.26	0
45°	+24.97	+2.31	+0.30	=0.07	0
60°	+70.45	+7.38	+1.50	+0.26	0

V $\varphi = -60°$

h \ a	15°	30°	45°	60°	90°
15°	−164.10	−20.80	−6.17	−2.13	0
30°	−130.83	−17.08	−5.58	−1.92	0
45°	−85.33	−12.00	−4.10	−1.64	0
60°	−6.56	−3.22	−2.03	−1.15	0

IV und V enthalten die Tafelwerte, wenn a positiv ist; für negatives a ist das Vorzeichen zu ändern.

Tafel II.

Sterne mit nördlicher Deklination.

		α		δ	
α	andromedae	0h	3m	28°	32′
β	cassiopeiae		4	58	36
γ	pegasi		8	14	38
α	cassiopeiae		35	55	59
γ	„		51	60	10
β	andromedae	1	4	35	5
δ	cassiopeiae		19	59	43
α	ursae minoris		23	88	46
β	arietis		49	20	19
γ	andromedae		58	41	51
α	arietis	2	2	22	59
α	ceti		57	3	42
β	persei	3	2	40	34
α	„		17	49	30
ζ	„		48	31	35
α	tauri	4	30	16	18
α	aurigae	5	9	45	54
γ	orionis		20	6	16
β	tauri		20	28	31
α	orionis		50	7	23
β	aurigae		52	44	56
γ	geminorum	6	32	16	29
α	„	7	28	32	6
α	canis minoris		34	5	29
β	geminorum		39	28	16
ι	ursae majoris	8	52	48	26
ε	leonis	9	40	24	14
α	„	10	3	12	27
γ	„		14	20	21
β	ursae majoris		56	56	55
α	„	10	58	62	18

		α		δ	
δ	leonis	11h	9m	21°	4′
β	„		44	15	8
γ	ursae majoris		49	54	15
ε	„ „	12	50	56	30
ε	virginis		57	11	30
ζ	ursae majoris	13	20	55	27
η	„ „		44	49	49
η	bootis		50	18	55
α	„	14	11	19	42
γ	„		28	38	45
ε	„		41	27	30
β	ursae minoris		51	74	34
α	coronae	15	30	27	3
α	serpentis		39	6	44
η	draconis	16	23	61	44
β	herculis		26	21	42
ζ	„		38	31	47
β	draconis	17	28	52	23
α	ophiuchi		30	12	38
β	„		38	4	37
γ	draconis		54	51	30
α	lyrae	18	34	38	41
δ	cygni	19	42	44	53
α	aquilae		46	8	36
γ	cygni	20	19	39	56
α	„		38	44	54
ε	„		42	33	36
α	cephei	21	16	62	10
ε	pegasi		39	9	25
β	„	22	59	27	32
α	„	23	0	14	40

Tafel III.

Sterne mit südlicher Deklination.

	α		—δ	
β hydri	0h	20m	77°	50′
α phoenicis		22	42	51
β ceti		39	18	32
α eridani		34	57	45
α hydri	1	56	62	4
η eridani	2	52	9	18
γ „	3	53	13	48
β orionis	5	10	8	19
δ „		27	0	22
α leporis		28	17	54
ε orionis		31	1	16
ζ „		36	1	59
α columbae		36	34	7
κ orionis		43	9	42
ζ canis majoris	6	17	30	1
β „ „		18	17	54
α argus		22	52	38
α canis majoris		41	16	34
ε „ „		55	28	50
δ „ „	7	4	26	14
ρ navis	8	3	24	1
ε argus		21	59	11
δ „		42	54	20
λ „	9	4	43	1
ζ „		12	69	18
ι „		15	58	51
α hydrae		23	8	13
ϑ argus	10	40	63	51
γ corvi	12	11	16	59

	α		—δ	
α crucis	12h	21m	62°	32′
γ crucis		26	56	33
δ corvi		25	15	58
β „		29	22	50
γ centauri		36	48	24
β crucis		42	59	8
α virginis	13	20	10	38
β centauri		57	59	53
ϑ „	14	1	35	53
α „		33	60	25
α librae		45	15	38
β „	15	12	9	1
δ scorpii		54	22	20
β „	16	0	19	32
α „		23	26	13
ζ ophiuchi		32	10	22
α trianguli		38	68	51
ε scorpii		44	34	7
η ophiuchi	17	5	15	36
ϑ scorpii		30	42	56
ε sagittarii	18	18	34	27
σ „		49	26	26
α pavonis	20	18	57	5
β aquarii	21	26	6	1
δ capricorni		41	16	36
α gruis	22	2	47	28
β „		37	47	26
α piscis australis		52	30	9

Tafel IV.

Erklärung der Ziffern der Sternkarten.

1. δ orionis.
2. ε orionis.
3. ζ orionis.
4. ζ canis majoris.
5. ε canis majoris.
6. δ canis majoris.
7. γ ursae majoris.
8. ε ursae majoris.
9. ζ ursae majoris.
10. α andromedae.
11. β cassiopeiae.
12. γ pegasi.
13. α cassiopeiae.
14. γ cassiopeiae.
15. β andromedae.
16. δ cassiopeiae.
17. α ursae minoris.
18. β arietis.
19. γ andromedae.
20. α arietis.
21. α leporis.
22. β persei.
23. α persei.
24. α tauri.
25. α aurigae.
26. γ orionis.
27. β tauri.
28. α orionis.
29. β aurigae.
30. γ geminorum.
31. α geminorum.
32. α canis minoris.
33. β geminorum.
34. ι ursae majoris.
35. ε leonis.
36. α leonis.
37. γ leonis.
38. β ursae majoris.
39. α ursae majoris.
40. δ leonis.
41. β leonis.
42. η ursae majoris.
43. α bootis.
44. η bootis.
45. ε bootis.
46. β ursae majoris.
47. α coronae.
48. α serpentis.
49. η draconis.
50. β herculis.
51. ζ herculis.
52. β draconis.
53. γ draconis.
54. α lyrae.
55. δ cygni.
56. γ cygni.
57. α cygni.
58. ε cygni.
59. α cephei.
60. ε pegasi.
61. β pegasi.
62. α pegasi.
63. α phoenicis.
64. β orionis.
65. α columbae.
66. κ orionis.
67. β canis majoris.
68. α argus.
69. α canis majoris.
70. ρ navis.
71. ε argus.
72. λ argus.
73. β argus.
74. ι argus.
75. ϑ argus.
76. γ corvi.
77. α crucis.
78. γ crucis.
79. δ corvi.
80. β corvi.
81. γ centauri.
82. β crucis.
83. β centauri.
84. ϑ centauri.
85. α hydri.
86. α centauri.
87. δ scorpii.
88. β scorpii.
89. α scorpii.
90. α trianguli.
91. ε scorpii.
92. β hydri.
93. ϑ scorpii.
94. ε sagittarii.
95. σ sagittarii.
96. α pavonis.
97. α gruis.
98. β gruis.
99. α piscis australis.
100. α librae.
101. β librae.
102. ε virginis.
103. α virginis.
104. α ceti.
105. β ceti.
106. α eridani.
107. η eridani.
108. γ eridani.
109. α ophiuchi.
110. ζ ophiuchi.
111. η ophiuchi.
112. α aquilae.
113. α hydrae.
114. δ capricorni.
115. β ophiuchi.
116. ζ persei.
117. β aquarii.
118. δ argus.

Horizontalargument: geographische Breite. **Tafel V.**
Vertikalargument: Höhe über dem Horizont.

r

Tafelwert: Grösse r.

h \ ± φ	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°	± φ / h
0°	∞	91.8	46.1	30.9	23.4	18.9	16.0	14.0	12.5	11.3	10.5	9.8	9.2	8.8	8.5	8.3	8.1	8.0	8.0	0°
5	91.4	45.8	30.6	23.6	18.6	15.6	13.6	12.1	10.9	10.1	9.3	8.8	8.4	8.0	7.8	7.6	7.4	7.4	7.3	5
10	45.5	30.2	23.2	18.2	15.3	13.2	11.7	10.5	9.7	9.0	8.4	7.9	7.6	7.3	7.1	6.9	6.8	6.7	6.7	10
15	29.9	22.8	17.4	14.9	12.4	11.3	10.2	9.3	8.6	8.0	7.5	7.2	6.9	6.6	6.4	6.3	6.2	6.1	6.1	15
20	22.0	17.5	14.6	12.5	11.0	9.8	8.9	8.2	7.6	7.2	6.8	6.5	6.2	6.0	5.9	5.7	5.7	5.6	5.6	20
25	17.2	14.2	12.1	10.6	9.5	8.6	7.9	7.3	6.8	6.4	6.1	5.8	5.6	5.5	5.3	5.2	5.2	5.1	5.1	25
30	13.8	11.8	10.3	9.1	8.2	7.5	6.9	6.5	6.1	5.7	5.5	5.3	5.1	4.9	4.8	4.7	4.7	4.6	4.6	30
35	11.4	9.9	8.8	8.0	7.2	6.5	6.1	5.7	5.4	5.1	4.9	4.7	4.6	4.4	4.3	4.3	4.2	4.2	4.2	35
40	9.6	8.4	7.5	6.8	6.2	5.8	5.4	5.0	4.8	4.5	4.4	4.2	4.1	4.0	3.9	3.8	3.8	3.7	3.7	40
45	8.0	7.1	6.4	5.9	5.4	5.0	4.7	4.4	4.2	4.0	3.8	3.7	3.6	3.5	3.4	3.4	3.3	3.3	3.3	45
50	6.7	6.0	5.5	5.0	4.6	4.3	4.1	3.8	3.6	3.5	3.4	3.3	3.2	3.1	3.0	3.0	2.9	2.9	2.9	50
55	5.6	5.1	4.6	4.2	4.0	3.7	3.5	3.3	3.1	3.0	2.9	2.8	2.7	2.7	2.6	2.6	2.5	2.5	2.5	55
60	4.6	4.2	3.9	3.6	3.3	3.1	2.9	2.8	2.6	2.5	2.5	2.4	2.3	2.3	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1	60
65	3.7	3.4	3.1	2.9	2.7	2.5	2.4	2.3	2.2	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	65
70	2.9	2.7	2.5	2.3	2.1	2.0	1.9	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6	1.5	1.5	1.5	1.4	1.4	1.4	1.4	70
75	2.1	2.0	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3	1.3	1.2	1.2	1.2	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	75
80	1.4	1.3	1.2	1.1	1.1	1.0	0.9	0.9	0.9	0.8	0.8	0.8	0.8	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	80
85	0.7	0.6	0.6	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	85
90	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	90
± φ / h	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°	h \ ± φ

m

Tafelwert: Grösse m.

m

Horizontalargument: Höhe über dem Horizont.
Vertikalargument: geographische Breite.

Tafel VI.

Correktionsglied zur Berechnung der Höhe des Polarsterns.

$$h = \varphi + R \qquad R = (90 - \delta) \cos t$$

Tafelwert: R in Bogenminuten.

Deklinationen

Stundenw. +	Stundenw. −	88° 45′	88° 46′	88° 47′	Stundenw. −	Stundenw. +
h m	h m				h m	h m
0 0	12 0	75′.0	74′.0	73′.0	12 0	24 0
0 30	12 30	74.4	73.4	72 4	11 30	23 30
1 0	13 0	72.4	71.5	70.5	11 0	23 0
1 30	13 30	69.3	68.4	67.5	10 30	22 30
2 0	14 0	65.0	64.1	63.2	10 0	22 0
2 30	14 30	59.5	58.7	57.9	9 30	21 30
3 0	15 0	53.0	52.3	51.6	9 0	21 0
3 30	15 30	45.7	45.0	44.4	8 30	20 30
4 0	16 0	37.5	37.0	36.5	8 0	20 0
4 30	16 30	28.7	28.3	27.9	7 30	19 30
5 0	17 0	19.4	19.2	18.9	7 0	19 0
5 30	17 30	9.8	9.7	9.5	6 30	18 30
6 0	18 0	0.0	0.0	0.0	6 0	18 0

Höhenänderung

Tafel VII.

ausgedrückt in Bogenminuten in einer Minute Sternzeit + { auf der Ost- / West- } Seite des Meridians.

Horizontalargument: geographische Breite.
Vertikalargument: Azimuth des Sterns.

a \ ± φ	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	± φ° / a
0°	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	180°
5	1′.3	1′.3	1′.3	1′.3	1′.2	1′.2	1′.2	1′.0	1′.0	0′.9	0′.8	0′.7	0′.6	0′.5	0′.4	175
10	2.6	2.6	2.5	2.5	2.4	2.4	2.3	2.2	2.0	1.8	1.7	1.5	1.3	1.1	0.9	170
15	3.9	3.9	3.8	3.7	3.5	3.5	3.4	3.2	3.0	2.7	2.5	2.2	2.0	1.7	1.3	165
20	5.1	5.1	5.0	5.0	4.8	4.6	4.4	4.2	3.9	3.7	3.3	2.9	2.6	2.2	1.8	160
25	6.3	6.3	6.2	6.1	6.0	5.8	5.5	5.2	4.9	4.5	4.1	3.6	3.2	2.7	2.2	155
30	7.5	7.5	7.4	7.3	7.1	6.8	6.5	6.2	5.7	5.3	4.8	4.3	3.8	3.2	2.6	150
35	8.6	8.6	8.5	8.3	8.1	7.8	7.5	7.2	6.6	6.1	5.5	5.0	4.3	3.6	2.9	145
40	9.7	9.7	9.5	9.3	9.1	8.7	8.3	8.1	7.4	6.8	6.2	5.5	4.8	4.1	3.3	140
45	10.6	10.6	10.4	10.2	10.0	9.6	9.2	8.7	8.1	7.5	6.8	6.1	5.3	4.5	3.7	135
50	11.4	11.4	11.3	11.1	10.8	10.4	10.0	9.4	8.8	8.1	7.4	6.6	5.7	4.9	3.9	130
55	12.2	12.2	12.1	11.9	11.5	11.1	10.6	10.0	9.4	8.7	8.1	7.2	6.2	5.2	4.2	125
60	13.0	13.0	12.8	12.5	12.2	11.8	11.3	10.6	10.0	9.2	8.3	7.5	6.5	5.5	4.4	120
65	13.7	13.7	13.4	13.2	12.8	12.3	11.8	11.1	10.4	9.6	8.7	7.8	6.8	5.8	4.6	115
70	14.2	14.2	13.9	13.7	13.3	12.8	12.2	11.5	10.8	10.0	9.1	8.1	7.0	6.0	4.8	110
75	14.6	14.6	14.3	13.9	13.7	13.2	12.5	11.9	11.1	10.2	9.3	8.3	7.3	6.1	5.0	105
80	14.9	14.8	14.6	14.2	13.9	13.4	12.8	12.1	11.3	10.4	9.5	8.5	7.4	6.2	5.0	100
85	14.9	14.9	14.8	14.6	14.2	13.7	13.0	12.2	11.4	10.6	9.7	8.6	7.5	6.3	5.1	95
90	15.0	15.0	14.9	14.6	14.2	13.7	13.0	12.2	11.5	10.6	9.7	8.6	7.5	6.3	5.1	90

Tafel VIII.

Aenderung des Stundenwinkels in Minuten bei einer Höhenänderung von ∓ 30'.

∓ auf der Westseite, ± auf der Ostseite des Meridians.

Horizontalargument: geographische Breite.

Vertikalargument: Azimuth des Sterns.

a \ ±φ	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	±φ / a
0°	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	180°
5	22.94	23.04	23.30	23.76	24.42	25.32	26.50	28.02	29.96	32.44	35.70	40.00	45.88	54.30	67.10	175
10	11.50	11.56	11.70	11.92	12.24	12.70	13.30	14.06	15.04	16.26	17.90	20.08	23.02	27.26	33.66	170
15	7.72	7.76	7.86	8.00	8.22	8.54	8.94	9.44	10.10	10.94	12.02	13.46	15.46	18.28	22.60	165
20	5.86	5.88	5.94	6.06	6.22	6.46	6.76	7.14	7.64	8.26	9.10	10.18	11.70	13.84	17.10	160
25	4.72	4.76	4.80	4.90	5.02	5.22	5.48	5.80	6.18	6.70	7.36	8.24	9.46	11.20	13.84	155
30	4.00	4.02	4.06	4.14	4.26	4.40	4.62	4.88	5.22	5.66	6.22	6.98	8.00	9.46	11.70	150
35	3.48	3.50	3.54	3.60	3.70	3.84	4.02	4.26	4.54	4.92	5.42	6.06	6.98	8.24	10.18	145
40	3.12	3.12	3.16	3.22	3.30	3.44	3.60	3.80	4.06	4.40	4.84	5.44	6.22	7.36	9.10	140
45	2.84	2.84	2.88	2.94	3.00	3.12	3.28	3.46	3.70	4.00	4.40	4.92	5.66	6.70	8.28	135
50	2.62	2.62	2.66	2.70	2.78	2.88	3.02	3.20	3.40	3.68	4.06	4.54	5.22	6.18	7.64	130
55	2.44	2.44	2.48	2.52	2.60	2.70	2.82	2.98	3.20	3.46	3.80	4.26	4.88	5.80	7.14	125
60	2.32	2.32	2.34	2.40	2.46	2.56	2.66	2.82	3.02	3.28	3.60	4.02	4.62	5.46	6.76	120
65	2.20	2.20	2.22	2.28	2.34	2.44	2.54	2.70	2.88	3.12	3.44	3.84	4.40	5.22	6.46	115
70	2.12	2.12	2.14	2.20	2.26	2.34	2.46	2.60	2.78	3.02	3.30	3.70	4.26	5.04	6.22	110
75	2.06	2.06	2.08	2.14	2.20	2.28	2.40	2.52	2.70	2.94	3.22	3.60	4.14	4.90	6.06	105
80	2.02	2.02	2.04	2.10	2.16	2.24	2.34	2.48	2.64	2.88	3.16	3.54	4.06	4.80	5.94	100
85	2.01	2.01	2.02	2.08	2.14	2.22	2.32	2.44	2.62	2.84	3.12	3.50	4.02	4.76	5.88	95
90	2.00	2.00	2.00	2.06	2.12	2.20	2.30	2.42	2.60	2.82	3.10	3.48	4.00	4.72	5.86	90

Tafel IX.

Aenderung des Stundenwinkels in Minuten bei einer Aenderung der Polhöhe um ± 30'.

Horizontalargument: geographische Breite.

Vertikalargument: Azimuth des Sterns.

a: ± φ	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	a: ± φ	
∓ 180°	∓ 0°	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	∞ m	± 180°	± 0°
185	5	22.84	22.94	23.38	23.66	24.32	25.22	26.40	27.90	29.84	32.32	35.64	39.84	45.72	54.08	66.82	175	355
190	10	11.34	11.38	11.52	11.64	12.08	12.52	13.10	13.88	14.84	16.04	17.66	19.32	22.68	16.84	33.16	170	350
195	15	7.46	7.50	7.58	7.92	7.94	8.24	8.62	9.12	9.76	10.54	11.62	13.00	14.92	17.62	21.82	165	345
200	20	5.50	5.52	5.58	5.68	5.84	6.08	6.34	6.72	7.18	7.76	8.56	9.52	11.00	13.04	16.08	160	340
205	25	4.28	4.30	4.36	4.44	4.56	4.74	4.96	5.24	5.60	6.06	6.66	7.46	8.58	10.12	12.54	155	335
210	30	3.46	3.48	3.52	3.58	3.68	3.82	4.00	4.24	4.54	4.90	5.40	6.04	6.94	8.20	10.12	150	330
215	35	2.86	2.88	2.90	2.94	3.04	3.16	3.30	3.50	3.72	4.02	4.44	4.98	5.70	6.74	9.54	145	325
220	40	2.38	2.40	2.42	2.46	2.54	2.64	2.76	2.90	3.12	3.36	3.70	4.14	4.76	5.64	6.96	140	320
225	45	2.00	2.00	2.04	2.08	2.12	2.20	2.32	2.44	2.60	2.82	3.12	3.48	4.00	4.72	5.84	135	315
230	50	1.68	1.68	1.70	1.74	1.78	1.86	1.94	2.04	2.18	2.36	2.60	2.92	3.36	3.96	4.90	130	310
235	55	1.40	1.40	1.42	1.46	1.50	1.54	1.62	1.70	1.82	1.96	2.16	2.44	2.80	3.30	4.08	125	305
240	60	1.16	1.16	1.18	1.20	1.22	1.26	1.34	1.42	1.50	1.62	1.80	2.02	2.30	2.72	3.38	120	300
245	65	0.92	0.92	0.94	0.96	1.00	1.04	1.08	1.14	1.22	1.30	1.46	1.64	1.86	2.20	2.74	115	295
250	70	0.72	0.72	0.74	0.76	0.78	0.80	0.84	0.90	0.96	1.02	1.14	1.28	1.46	1.72	2.14	110	290
255	75	0.54	0.54	0.54	0.56	0.58	0.60	0.62	0.66	0.70	0.76	0.84	0.94	1.08	1.26	1.56	105	285
260	80	0.36	0.36	0.36	0.36	0.38	0.40	0.42	0.44	0.46	0.50	0.54	0.60	0.70	0.86	1.04	100	280
265	85	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.20	0.22	0.23	0.23	0.24	0.26	0.30	0.34	0.42	0.46	95	275
270	90	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	90	270